# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие
для студентов экономического факультета

г. Ставрополь
2023

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

*студента(-ки)*_______*курса*___________________________*факультета*

_____________________________________________________________

_____________________________________________________________

*группы №*______

*направления*_____________________________________________________

_____________________________________________________________

Ставрополь
2023

УДК 330.4
ББК 65.050
Г 94

***Авторский коллектив:***
*Татьяна Александровна Гулай*
*Анна Федоровна Долгополова*
*Виктория Артемовна Жукова*
*Светлана Васильевна Мелешко*
*Ирина Алексеевна Невидомская*

**Элементы теории вероятностей и математической статистики:** учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская. – Ставрополь: 2022. 86–с.

Учебное пособие предназначено для студентов экономического факультета, входит в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по теории вероятностей и математической статистики.

УДК 330.4
ББК 65.050
Г 94

# ГЛАВА 1 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## 1.1 Основные понятия теории вероятностей

### Опыт и события теории вероятностей. Пространство исходов опыта

При изучении и описании окружающего мира часто приходится встречаться с явлениями особого типа, которые принято называть ***случайными***. По сравнению с другими, для них характерна большая степень неопределённости, непредсказуемости.

***Случайное явление –*** *это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта (испытания) протекает каждый раз несколько по-иному.*

***Теорией вероятностей*** *называется математическая наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях. Её предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях.*

Одними из основных понятий теории вероятностей являются опыт и событие.

Под ***опытом*** (экспериментом, испытанием) будем понимать некоторую воспроизводимую совокупность условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или другой результат.

Если результат опыта изменяется при его повторении, то говорят об ***опыте со случайным исходом.***

***Случайным событием*** (просто событием) называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Пространство элементарных событий будем обозначать $\Omega$, а его точки – $\omega$.

***Совмещением* (или *произведением*)** двух событий $A$ и $B$ называется событие, состоящее в совместном наступлении как события $A$, так и события $B$. Это событие будем обозначать $AB$ или $BA$. Аналогично, совмещением нескольких событий, например $A$, $B$ и $C$, называется событие $D=ABC$, состоящее в совместном наступлении событий $A$, $B$ и $C$.

***Объединением* (или *суммой*)** двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, заключающееся в том, что произойдет по крайней мере одно из событий $A$ или $B$. Это событие обозначается так: $C=A+B$.

Пусть имеется некоторое испытание. Свяжем с ним определённую совокупность исходов, причём так, чтобы в результате испытания осуществлялся один и только один из этих исходов. *Такое множество называется* ***пространством элементарных событий****,* связанных с рассматриваемым испытанием, а входящие в множество исходы (результаты испытания) – ***точками пространства или элементарными событиями.***

**Замечания**

**1.** Для одного и того же испытания пространство элементарных событий можно вводить, вообще говоря, различными способами.

**2.** Пространство $\Omega$ может содержать конечное или бесконечное множество элементарных событий.

**3.** Если пространство состоит из конечного или счётного множества точек, то его называют ***дискретным***.

Рассмотрим некоторое пространство элементарных событий $\Omega$. Из точек его можно сформировать различные множества.

Множество, состоящее из каких-то элементарных событий пространства $\Omega$, называют ***случайным событием.*** Если элементарное событие $\omega$ принадлежит событию *A*, то пишут $\omega \in A$, если не принадлежит, то $\omega \notin A$.

Под ***достоверным*** событием понимают событие, составленное из всех точек данного пространства $\Omega$. Другими словами ***достоверное*** событие это событие, которое происходит при каждом испытании.

Достоверное событие будем обозначать $\Omega$.

Под ***невозможным*** событием понимается событие, не содержащее ни одного элементарного события из данного пространства $\Omega$. Другими словами, невозможное событие – событие, которое не может произойти ни при каком исходе испытания. Невозможное событие будем обозначать $\bar{\Omega}$.

Два случайных события *A* и *B,* составленные из одних и тех же элементарных событий, называют ***равными*** и пишут *A=B*, или два равных события при одном и том же опыте либо оба проявляются, либо оба не проявляются. Используется так же термин «равновозможные» события. Допустим, что все элементарные события, принадлежащие событию *A*, принадлежат также и событию *B*. В этом случае говорят, что событие *A* влечёт за собой событие *B*, или что событие *B* есть следствие события *A*, пишут $A \subset B$, или всякий раз, когда в результате опыта происходит событие *A*, происходит и событие *B* (обратное, вообще говоря неверно).

**Замечания**

**1.** Пусть $A \subset B$ и $B \subset A$, тогда *A* и *B* состоят из одних и тех же элементарных событий, следовательно *A=B*.

**2.** Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

**3.** Каким бы ни было случайное событие *A*, состоящее из точек данного пространства элементарных событий $\Omega$, всегда имеет место соотношение $A \subset \Omega$. С другой стороны принято считать, что невозможное событие влечёт за собой любое случайное событие *A*, т.е. $\bar{\Omega} \subset A$. Поэтому $\bar{\Omega} \subset A \subset \Omega$.

Два события, не содержащие общих элементарных событий, называют ***несовместными***. Другими словами, события называются ***несовместными***, если наступление одного из них исключает наступление другого. В противном случае события называются ***совместными***.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n \left(n \geq 2\right)$ называются попарно несовместными, если любые два из них несовместны.

## 1.2 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

***Определение 1.*** Различные группы, составленные из каких-либо элементов, и отличающиеся одна от другой либо их порядком, либо элементами, называются *соединениями*.

Различают три вида соединений:

1. *перестановки;*
2. *размещения;*
3. *сочетания.*

***Определение 2.*** *Перестановками* называются такие соединения из «n» элементов, которые составлены из одних и тех же элементов и отличаются только порядком следования элементов.

Например, множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие перестановки: $(1, 2, 3)$, (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается $P_n$ и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \qquad (1)$$

**Пример 1**. Пять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения скважин поступили в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очередности вскрытия конвертов с предложениями цены?

**Решение.** Пронумеруем конверты цифрами от 1 до 5. Каждому конверту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих пяти цифр, например, (2, 5, 3, 4, 1). Такой набор означает, что сначала выбирается второй конверт, затем пятый, третий, четвертый и первый. Всего различных конвертов, т. е. отличающихся порядком наборов пяти цифр будет $5! = 120$.

***Определение 3.*** *Размещениями* называются соединения из «n» элементов по «m» в каждом, отличающиеся одно от другого как самими элементами, так и их порядком. Размещения могут отличаться друг от друга, как элементами, так и порядком.

Например, различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$.

Число размещений из $n$ элементов по $m$ определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

**Пример 2**. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Ее сотрудники подобрали 8 подходящих одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в заданном порядке?

**Решение**. Пронумеруем удобные помещения цифрами от $1, 2, \ldots, 8$. Составить способы отбора помещений можно следующим образом. Сначала выберем помещения, например, $(2, 4, 5, 7)$, а затем порядок их выбора. Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$

***Определение 4.*** *Сочетаниями* называются такие соединения, которые взяты из «n» элементов по «m» в каждом и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (порядок следования элементов не учитывается).

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Например, для множества $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по 2 элемента являются $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$.

Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{3}$$

**Пример 3**. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, состоящих на учете в службе занятости. Сколько возможных комбинаций выбора 9 из 15 безработных?

**Решение.** Комбинации выбора образуют сочетания из 15 по 9, поскольку порядок выбора среди 15 безработных нам безразличен, т.к. безработные по одной специальности. Следовательно, число возможных комбинаций будет равно $C_{15}^9 = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005$.

***Размещения с повторениями***

Пусть имеется $n$ непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, каждое из которых содержит не менее чем $m$ элементов. Из элементов множества $A$, то есть элементов, входящих в различные его подмножества $A_i$, можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие по m элементов в каждом.

Такие упорядоченные множества принято называть *размещениями с повторениями из элементов n сортов по m элементов, или, более коротко, просто размещениями с повторениями из n элементов по m.*

Число различных возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов определяется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \tag{4}$$

**Пример 4.** В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы.

**Решение**. Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим). Причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз (любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким (включая все пять) номинациям), т.е. представляет размещение с повторениями из 10 элементов по 5. По формуле имеем:

$$\tilde{A}_{10}^{5} = 10^5 = 100000.$$

***Перестановки с повторениями***

***Определение 4**. Перестановкой с повторениями из n элементов называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из n элементов, среди которых имеются совпадающие.*

Отсюда следует, что число различных перестановок с повторениями в нашем случае равно:

$$\tilde{P}_n(\alpha;\beta;\gamma;...;\lambda) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,...\,\lambda!}, \text{ где } n = \alpha+\beta+\gamma+...+\lambda \quad (5)$$

**Пример 5**. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5, 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

**Решение**. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр ( причем $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Тогда:

$$\tilde{P}_n(3;2;2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

***Сочетания с повторениями***

***Определение 5.** Сочетанием с повторениями из n элементов по m элементов называется всякое множество, содержащее m элементов, каждый из которых является элементом одного из данных n сортов.*

Число различных возможных сочетаний с повторениями из nэлементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \quad (6)$$

**Пример 6**. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы.

**Решение.** Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5. Тогда:

$$\tilde{C}_{10}^5 = \frac{(5+10-1)!}{5!(10-1)!} = 2002.$$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Сколькими способами можно взять 7 костей из полного набора домино (28 штук)?

2. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?

3. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?

4. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на различные должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всего групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

5. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на одинаковые должности (все 10 кандидатов имеют разные шансы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

6. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то, сколько существует способов его осуществления?

7. Директор корпорации рассматривает заявления о приеме на работу 10 выпускников университета. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?

8. Имеется 6 путевок в санаторий и 7 путевок в дом отдыха. Сколькими способами можно выдать некоторому учреждению 3 путевки в санаторий и 4 путевки в дом отдыха?

9. На железнодорожной станции имеется пять запасных путей. Сколькими способами можно расставить шесть поездов?

10. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами преподаватель может поставить им оценки, если известно, что все студенты сдали экзамен.

11. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все числа которого различны?

12. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками так, чтобы каждый получил 7 костей?

13. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 2, 3, 4, в которых цифра 2 повторяется 4 раза, цифра 3 – 3 раза, цифра 4 – 5 раз?

## 1.3 Определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность.

**Определение** *Вероятностью P(A) события в данном опыте называется отношение числа* $m$ *исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу* $n$ *возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:*

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (7)$$

Это определение вероятности часто называют *классическим*.

**Пример .** На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту.

Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

*Решение*

Число стандартных подшипников равно *1000-30=970*. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из $n=1000$ равновероятных исходов, из которых событию $A$ благоприятствуют $m=970$ исходов. Поэтому $P(A)=m/n=970/1000=0.97$.

При оценке вероятности событий, основанной на том, насколько ***часто*** будет проявляться данное событие в ***произведённых*** испытаниях, используется статистическое определение вероятности.

***Статистической вероятностью*** события $A$ называется относительная частота (частость) появления этого события в произведённых испытаниях, т.е.

$$P^*(A)=W(A)=\frac{M}{N}, \qquad (8)$$

где $P^*(A)$ - статистическая вероятность события $A$;

$W(A)$ - относительная частота (частость) события $A$;

M – число испытаний, в которых появилось событие $A$;

N – общее число испытаний.

В отличие от вероятности $P(A)$, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность $P^*(A)$ является характеристикой ***опытной, экспериментальной.*** Если $P(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих событию $A$, которая определяется непосредственно, без каких-либо испытаний, то $P^*(A)$ есть доля тех ***фактически произведённых испытаний,*** в которых событие $A$ появилось.

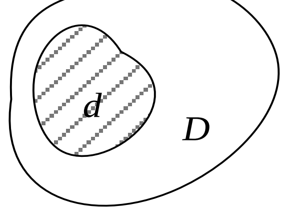
**Пример.** Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчиков?

*Решение*

Пусть событие $A$ – «рождение мальчика». Общее число испытаний в данной задаче $n=1000$, число $m$ появлений события $A$ равно 515. Частота появления события A: $P^*(A)=\frac{m}{n}=\frac{515}{1000}=0,515$

**Геометрическая вероятность**

Пусть на плоскости имеется некоторая область $D$, площадь которой $S_D$, и в ней содержится другая область $d$, площадь которой $S_d$ (рисунок 1.6). В область $D$ наудачу бросается точка.




При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области и вероятность попадания в какую-либо часть области $D$

не зависит от её расположения и формы. Рисунок 1.6

Это значит, что пространство Ω содержит несчетное множество равновозможных элементарных событий ω и область *D* является геометрическим образом пространства Ω. Тогда $P(A)=\frac{S_d}{S_D}$ равна отношению площади области *d*, занятой благоприятствующими положениями точки попадания к площади области *D*.

***Геометрической вероятностью события А*** называется отношение меры области (длины, площади, объёма) благоприятствующей появлению события *А*, к мере всей области, т.е.

$$P(A)=\frac{mes\ d}{mes\ D}, \tag{9}$$

где $mes$ - мера (длина, площадь, объём).

***Задачи для решения в аудитории***

1. Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 5?

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешены. Какова вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь 2 окрашенные стороны.

3. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий 2 теоретических вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

4. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Какова частота появления герба в данной серии испытаний?

5. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

6. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

7. В магазине проведен учет спроса костюмов:

| Размер | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Спрос | 90 | 148 | 532 | 585 | 455 | 183 |

Определить частость спроса в % 48 размера

8. Некоторая фирма в течение времени провела опрос 1000 покупателей нового сорта напитка и 20 из них оценили его как вкусный. Оценить вероятность того, что потребителям понравится новый напиток.

9. На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L=150 м. В том числе 50 м трубы приходятся на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 *см* соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

11. В круг радиуса $R$ помещен меньший круг радиуса $r$. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

## 1.4 Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событием, *противоположным* событию $A$, называется событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события А.

**Теорема 1.** *Для любого события* А *вероятность противоположного события* $\bar{A}$ *выражается равенством*

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

**Теорема 2.** *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Как отмечено выше, вероятность Р ($B$) как мера степени объективной возможности наступления события $B$ имеет смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события $B$ может измениться.

**Определение 1**. Вероятность события $B$, вычисленная при условии, что произошло некоторое событие $A$, называется ***условной вероятностью*** события $B$ и обозначается.

$$P_A(B)$$

**Пример:** Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15.К.в.т.,ч. 2-го августа будет дождь?

| | I | II |
|---|---|---|
| $n=31$ | $A-1.08$ - дождь | $A-1.08$ - ясно |
| $m_д=15$ | B - 2.08 - дождь | B- 2.08 - дождь |
| | $\text{n}=30 \quad \text{m}_д=14$ | $\text{n}=30 \;;\; \text{m}_д=15$ |
| | $P_A(B)=\dfrac{14}{30}$ | $P_A(B)=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$ |

**Теорема умножения двух зависимых событий.**

**Теорема 3** Вероятность совместного наступления двух зависимых событий $A$ и $B$ равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)} \qquad (10)$$

*<u>Следствие 1.</u>* Теорема (3) легко обобщается на случай произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \underset{A_1}{P}(A_2) \cdot \underset{A_1 A_2}{P}(A_3) \cdot \ldots \cdot \underset{A_1 ... A_{n-1}}{P}(A_n)$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

*<u>Следствие 2.</u>* Для любого из событий $A$ и $B$ справедливо равенство

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, т.е. теорема (3) обладает коммутативностью умножения $A \cdot B = B \cdot A$

**Пример.** См. условие предыдущей задачи. К.в.т.,ч. 1, 2, 3 августа будут дождливы?

$A$ – 1.08. – дождь

$B$ – 2.08. – дождь

$C$ – 3.08. – дождь

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot \underset{A \cdot B}{P}(C)$$

$$P(A) = \frac{15}{31} \quad ; \quad P_A(B) = \frac{14}{30} \quad ; \quad \underset{A \cdot B}{P}(C) = \frac{13}{29}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{\cancel{15}}{31} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{899} = 0{,}1$$

**Теорема умножения для независимых событий.**

**Определение 2.** Два события называются ***независимыми***, если появления одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Пусть события $A$ и $B$ – независимы, тогда $P_A(B) = P(B)$

**Теорема 4.** Вероятность совместного наступления двух независимых событий $A$ и $B$ равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \qquad (11)$$

*<u>Следствие.</u>* Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

**Пример.** Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. К.в.т.,ч. все три вынутые детали окажутся нестандартными?

$$\left.\begin{array}{l} A\text{- нестандартная деталь из 1-го ящика} \\ B\text{-} \quad \text{-}\|\text{-} \qquad \text{-}\|\text{-} \qquad \text{-}\|\text{- 2-го ящика} \\ C\text{-} \quad \text{-}\|\text{-} \qquad \text{-}\|\text{-} \qquad \text{-}\|\text{- 3-го ящика} \end{array}\right| \text{ независимые}$$

$$P(A)=\frac{2}{10} \quad ; \quad P(B)=\frac{3}{10} \quad ; \quad P(C)=\frac{1}{10}$$

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,006$$

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий.**

**Теорема 5.** Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий *A* или *B* равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)} \qquad (12)$$

**Пример:** В денежно - вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша?

$$\begin{array}{l|l} n=10000 & C-\text{выигрыш} \\ m_в=150 & \left.\begin{array}{l} A-\text{вещевой выигрыш} \\ B-\text{денежный выигрыш} \end{array}\right| \text{несовместные} \\ m_д=50 & \\ \hline P(C)-? & C=A+B \text{ (или вещевой, или денежный)} \\ & P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{150}{10000}+\frac{50}{10000}=\frac{200}{10000}=0,02 \end{array}$$

<u>*Следствие 1*</u>. Данная теорема справедлива для «**n**» несовместных событий.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

<u>*Следствие 2.*</u> Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1.

$$\boxed{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=1}$$

<u>*Следствие 3*</u>. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1},$$

где $A-$данное событие, $\overline{A}-$противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную систему событий. Принято обозначать $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q$. Следовательно $\boxed{p+q=1}$.

**Пример.** Если вероятность попадания в цель p=0,8, то вероятность промаха q= 0,2.

**Теорема сложения для совместных событий.**

**Теорема 6.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (13)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использовать формулу:

$P(A_1+A_2+...+A_к)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot ...\cdot P(\overline{A_к})$ или $\boxed{P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3.....}$, т.е.

**Определение 3**. Вероятность появления **<u>хотя бы одного</u>** из событий $A_1, A_2...A_к$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$ ; $\overline{A_2}$ ... $\overline{A_к}$ .

***Частный случай.*** Если события $A_1, A_2...A_к$ имеют одинаковую вероятность, равную «**р**», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A)=1-q^k$

**Пример**. В типографии имеется 4 плоскопечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент = 0,9. К.в.т., ч. в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *А*).

$p=0,9$

$q=1-0,9=0,1$

$P(A)-?$

$P(A)=1-q^4=1-(0,1)^4=1-0,0001=0,9999$

<u>*Замечание*</u> При использовании формулы (4) следует иметь в виду, что события *А* и *В* могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

Для зависимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$$

**Пример 1**. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа1-го из них – 0,05;2-го - 0,08. К.в.т.,ч. откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент?

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P(A_1) = 0,05 \\ \underline{P_2 = P(A_2) = 0,08} \\ \quad P(A_1 + A_2) - ? \\ \quad q_1 = 0,95 \\ \quad q_2 = 0,92 \end{array}\right| \begin{array}{l} A_1 \text{ и } A_2 - \text{совместные события, независимые} \\ 1)\ P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P(A_2) = 0,05 + 0,08 - 0,05\cdot 0,08 = \\ \quad = 0,13 - 0,004 = 0,126 \\ 2)\ P(A_1 + A_2) = 1 - q_1\cdot q_2 = 1 - 0,95\cdot 0,92 = 1 - 0,874 = 0,126 \\ \\ \end{array}$$

**Пример 2**. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. К.в. выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$$\left.\begin{array}{l} n = 100 \\ \underline{m = 2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1 - \text{выиграл 1-й билет} \\ A_2 - \ - \ \| - \ 2 - \text{й билет} \end{array}\right| \text{совместные, зависимые} \\ P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2) = \dfrac{5}{100} + \dfrac{5}{100} - \dfrac{5}{100}\cdot\dfrac{4}{99} = 0,098 \\ \Rightarrow \text{оба} : 2 - \text{ой билет выиграет, если выиграл 1-й} \end{array}$$

**Вероятность появления только одного события.**

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий $A_1$ и $A_2$ соответственно равны $p_1$ и $p_2$. Найдем вероятность появления только одного из этих событий. Введем обозначения событий:

$B_1$ - появилось только событие $A_1$;

$B_2$ - появилось только событие $A_2$.

Появление события $B_1$ равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ (появилось первое событие и не появилось второе), т.е. $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$

Появление события $B_2$ <=> появлению события $\overline{A_1} \cdot A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т.е. $B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий $A_1$ и $A_2$, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий $B_1$ и $B_2$. События $B_1$ и $B_2$ несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) \qquad (*)$$

Найдем вероятности каждого из событий $B_1$ и $B_2$. События $A_1$ и $A_2$ независимы, => независимы события $A_1$ и $\overline{A_2}$, а также $\overline{A_1}$ и $A_2$, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p_1 \cdot q_2$$

$$P(B_2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2$$

Подставим эти вероятности в соотношение (*) и найдем искомую **вероятность появления только одного из событий** $A_1$ и $A_2$:

$$\boxed{P(B_1+B_2)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2}$$

**Пример.** Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. К.в.т.,ч. при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$$p_1=0,7$$
$$p_2=0,8$$
$$q_1=0,3$$
$$q_2=0,2$$
$$P(B_1+B_2)-?$$

$$P(B_1+B_2)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8=0,14+0,24=0,38$$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Из участников танцевального кружка, состоящего из 8 девушек и 4 юношей, выбирают 9 человек для определенного танца. Найти вероятность того, что среди участников окажутся все юноши?

2. В урне 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность, что все 3 шара голубые.

3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

4. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, равна 0,4, а того, что он произведен в Турции - 0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран?

5. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Найти: 1) вероятность того, что в течение часа ни один из трех станков не потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.

6. Вероятность летной погоды равна 0,9, а вероятность того, что при условии летной погоды груз будет доставлен своевременно -0,8. Какова вероятность того, что груз будет доставлен своевременно?

7. Исследователь разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула окажется в первом справочнике, равна 0.6, во втором – 0.7, в третьем – 0.8. Какова вероятность того, что формула окажется:

а) только в одном справочнике;
б) только в двух справочниках;
в) во всех трех справочниках;
г) хотя бы в одном справочнике;
д) ни в одном справочнике;
е) хотя бы в двух справочниках;
ж) только в первом справочнике;
з) только во втором справочнике;
и) не менее чем в двух энциклопедиях.

8. В партии из 50 деталей имеется 10 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 20 деталей окажется 3 бракованных?

9. Прокуратура проверяет деятельность одного частного предпринимателя, который владеет тремя магазинами. Проверка проводится одним проверяющим в одном произвольно выбранном магазине. Вероятность выявить нарушения в первом магазине равна 0,1, во втором – 0,3, в третьем – 0,25. Какова вероятность того, что нарушения будут выявлены:

а) только в одном магазине; б) только в двух магазинах; в) во всех трех магазинах; г) хотя бы в одном магазине; д) ни в одном магазине; е) хотя бы в двух магазинах; ж) только в первом магазине; з) только во втором магазине; и) не менее чем в двух магазинах.

## 1.5 Формула полной вероятности

Пусть событие $A$ может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Тогда, если произошло событие $A$, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий $H_1A, H_2A, ..., H_nA$. Следовательно,

$$P(A)= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + ..... + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \qquad (14)$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***. События $H_1$, $H_2, ..., H_n$ часто называют «гипотезами».

**Пример .** В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го – 525 шт., с 3-го – 275 шт. и с 4-го – 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го – 0,30, для 3-го – 0,20, для 4-го – 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1500 часов?

**Решение.** Пусть $A$ – событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1500 часов, а $H_1$, $H_2$, $H_3$ и $H_4$ – гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны:

$P(H_1)=\frac{250}{2000}=0{,}125$; $P(H_2)=\frac{525}{2000}=0{,}2625$; $P(H_3)=\frac{275}{2000}=0{,}1375$

$P(H_4)=\frac{950}{2000}=0{,}475$.

Далее, из условия задачи следует, что $P_{H_1}(A)$ = 0,15; $P_{H_2}(A)$ = 0,3; $P_{H_3}(A)$ = 0,2; $P_{H_4}(A)$ = 0,1.

Используя формулу полной вероятности (8), получаем:

$$P(A) = 0{,}125\cdot 0{,}15 + 0{,}2625\cdot 0{,}3 + 0{,}1375\cdot 0{,}2 + 0{,}475\cdot 0{,}1 = 0{,}1725$$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Детали для обработки поступают из двух заготовительных цехов: из первого цеха – 70%, из второго – 30%, причем продукция первого цеха имеет 10% брака, а продукция второго цеха – 20% брака. Какова вероятность того, что случайно взятая деталь будет без дефектов?

2. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году будет равна 0,75, если экономика страны будет на подъеме; и эта же вероятность будет равна 0,3, если экономика страны не будет успешно развиваться. Вероятность экономического подъема в новом году равна 0,8. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.

3. В университетской лаборатории имеется 6 вычислительных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя равна 0,95, для полуавтомата – 0,8. Лаборант производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

## 1.6 Формула Байеса

Формула Байеса имеет вид:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)} \tag{15}$$

**Пример 1.** На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

**Решение.** Пусть *А* – событие, состоящее в том, что взятый Подшипник нестандартный, а $H_1$, $H_2$, $H_3$ – гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом. Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1) = \frac{200}{1000} = 0{,}2;\ P(H_2) = \frac{460}{1000} = 0{,}46;\ P(H_3) = \frac{340}{1000} = 0{,}34$$

Из условия задачи следует, что $p_1 = P_{H_1}(A) = 0{,}03$; $p_2 = P_{H_2}(A) = 0{,}02$; $p_3 = P_{H_3}(A) = 0{,}01$.

Найдем $P_A(H_1)$, т.е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Бейеса получаем:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)p_1}{P(H_1)p_1 + P(H_2)p_2 + P(H_3)p_3} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}03}{0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}46 \cdot 0{,}02 + 0{,}34 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}322$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

### *Задачи для решения в аудитории*

1. У рыбака имеется 3 излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,5; на втором – 0,7; на третьем – 0,6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

2. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеваниям Н, 35% – с заболеванием Х, 15% – с заболеванием Z. Вероятность полного излечения болезни Н равна 0,7; для болезней Х и Z вероятности излечения соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием Н.

3. Из числа авиалиний аэропорта 60 % - местные, 30 % - по СНГ, 10 % - международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50 % бизнесменов, на линиях СНГ таких пассажиров 60 %, на международных - 90 %. Чему равна вероятность, что случайно выбранный пассажир: а) бизнесмен, б) прибыл из стран СНГ, в) прибыл местным рейсом, г) прибыл международным рейсом?

## 1.7 Последовательные испытания. Формула Бернулли

Всякую комбинацию, в которую $A$ входит $m$ раз и $\bar{A}$ входит $n$-$m$ раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству $k$ способов, которыми можно выбрать $m$ чисел из данных $n$. Таким образом, оно равно числу сочетаний из $n$ элементов по $m$, т.е. $k = C_n^m$

Все благоприятные комбинации являются, очевидно, несовместными. Поэтому (на основании аксиомы сложения вероятностей): $P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_i) = C_n^m p^m q^{n-m}$

Следовательно,

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad \text{- } \textit{формула Бернулли} \qquad (16)$$

**Пример 1.** Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

**Решение.** Здесь $n$=8; $m$=5; $p$=0,6; $q$=1-0,6=0,4.

Используя формулу (10), имеем $P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}6)^5(0{,}4)^3 \approx 0{,}28$

Часто необходимо знать, при каком значении $m$ вероятность принимает наибольшее значение, т.е. требуется найти *наивероятнейшее число* $\mu$ *наступления события* $A$ в данной серии опытов. Можно доказать, что число $\mu$ должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np-q \le \mu \le np+p$$

Заметим, что сегмент $[np\text{-}q; np+p]$, в котором лежит $\mu$, имеет длину $(np+p)\text{-}(np\text{-}q)=p+q=1$. Поэтому, если какой-либо из его концов не является целым числом, то между этими концами лежит единственное целое число, и $\mu$ определено однозначно. В том случае, если оба конца — целые числа, имеются два наивероятнейших значения: $np$-$q$ и $np+p$.

**Пример 2.** Орудие выпустило 36 снарядов с вероятностью попадания равна 0,85. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

**Решение.** $36 \cdot 0{,}85\text{-}0{,}15 \le \mu \le 36 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85$

$$30{,}45 \le \mu \le 31{,}55, \text{ следовательно, } \mu=31$$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Производство дает 60% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 6 изделий окажется: а) 4 изделия первого сорта; б) не менее 4 изделий первого сорта.

2. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течении года составляет 10 %. Чему равна вероятность того, что в течении года обанкротится не больше одного банка?

3. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность промаха в отдельном выстреле равна 0,3.

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

### 1.8 Вероятность редких событий. Формула Пуассона

Формула Пуассона выводится из формулы Бернулли и после ряда преобразований выглядит следующим образом:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (17)$$

где $\lambda = np$ и $k$ – количество раз, которое произойдет редкое событие.

Все значения сведены в таблицу и представлены в приложении 1.

**Пример.** Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за это время откажут ровно 3 элемента.

**Решение.** $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2,\ P_{1000}(3) = 0{,}18$.

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Среди семян пшеницы высшего сорта 0,04% сорняков. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 5000 семян обнаружиться 5 семян сорняков?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Какова вероятность того, что при 1000 выстрелов будет не более двух попаданий?

3. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум две единицы оборудования?

## 1.7 Локальная теорема де Муавра-Лапласа

**Теорема.** Если вероятность р появления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$ появления события *A* в *n* испытаниях равно *m* раз приближенно равна значению функции:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (18)$$

В связи с трудностями вычисления по формуле (18) созданы специальные таблицы, представленные в приложении 2.

На практике применяют локальную теорему в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где} \quad x = \frac{|m - np|}{\sqrt{npq}}$$

**Пример 1**. Найти вероятность того, что 80 из 1000 покупателей приобретут мужскую обувь, если вероятность покупки обуви *p*=0,11 (по данным из наблюдений за предыдущий период).

**Решение.** $p$=0,11 $q$=1–0,11=0,89 n=1000 m=80

$$x = \frac{|\ 80 - 1000 \cdot 0{,}11\ |}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89}} = \frac{|-30|}{\sqrt{97{,}9}} = \frac{30}{9{,}9} = 3{,}03$$

$$P_{1000}(80) \approx \frac{\varphi(3{,}03)}{\sqrt{97{,}9}} \approx \frac{0{,}0040}{9{,}9} \approx 0{,}0004$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

***Задачи для решения в аудитории***

1. Вероятность того, что элемент прибора не выйдет из строя, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 600 элементов прибора за время его работы не выйдет из строя 450 элементов?

2. На каждые 100 посеянных зерен всходит в среднем 85. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных зерен взойдет 840?

3. В банк поступило 100 авизо. Подозревают, что среди них 20 фальшивых. Тщательной проверке подвергается 60 случайно отобранных авизо. Чему равна вероятность, что в ходе проверки обнаружится 10 фальшивых?

## 1.8 Интегральная формула Лапласа

Если вероятность р появления событий А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 , то:

$$P_n(a \le k \le b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \text{где} \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \qquad (19)$$

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, поэтому $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. При значениях $x>5$ считается $\Phi(x)\approx 0,5$.

Значения функции даны в приложении 3.

На практике интегральная теорема Лапласа применяется в виде :

$P_n\left(a<k<b\right)=\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right)$

**Пример .** Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,85. Найти вероятность того, что событие появится не менее 70 раз и не более 95 раз.

**Решение.** $p=0,85$ $q=1-0,85=0,15$ $n=100$ $a=70$ $b=95$

$$x_1=\frac{70-100\cdot 0,85}{\sqrt{100\cdot 0,85\cdot 0,15}}=\frac{70-85}{\sqrt{12,75}}=-\frac{15}{3,75}=-4$$

$$x_2=\frac{95-100\cdot 0,85}{\sqrt{100\cdot 0,85\cdot 0,15}}=\frac{95-85}{\sqrt{12,75}}=-\frac{10}{3,75}=2,66$$

$P_{100}(70\le k\le 95)\approx\Phi(2,66)-\Phi(-4)\approx 0,4961+0,499968=0,996068$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Производство дает 40% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 600 первосортных изделий окажется от 228 до 252?

2. В инкубаторе вероятность вывода петушка равна 0,5. Определить вероятность того, что из 10000 выведенных цыплят число петушков будет от 4950 до 5150?

3. Фирма выпускает 75 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий не менее 280 будут первосортными.

# ГЛАВА 2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

## 3.1 Понятие случайной величины и случайного вектора и закон их распределения

***Случайной величиной*** (далее будем обозначать СВ) называют числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате опыта со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют ***множеством значений*** этой случайной величины.

***Законом распределения*** случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон можно задать аналитически, таблично, графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величиной X (*ДСВ X)* является ряд распределения.

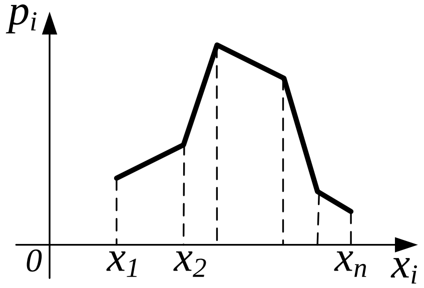
Рядом распределения вероятностей *ДСВ X* называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что случайная величина примет эти значения.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $p_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1 = P(X = x_1)$ | $p_2 = P(X = x_2)$ | $\dots$ | $p_n = P(X = x_n)$ |

Так как события $X_1, \dots, X_n$ несовместны, потому что *СВ* может принять в результате опыта только одно значение, и образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности ряд распределения представляют графически. Для этого все возможные значения случайной величины откладывают по оси *0x*, а по оси *0y* - соответствующие вероятности. Вершины полученных ординат обычно соединяют отрезками прямых.




Такая фигура называется ***многоугольником распределения.***

***Формы закона распределения***

*а) Функция распределения и её свойства*

Функцией распределения *СВ X* называется функция *F(x)* выражающая для каждого *x* вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x)=P(X<x).$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Для *ДСВ X*, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения будет иметь вид:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)$$

где символ $x_i<x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все те возможные значения СВ, которые по своей величине меньше аргумента *x*.

**Основные свойства функции распределения**

**Свойство 1.** $0 \le F(x) \le 1$.

**Свойство 2.** Если $\beta \ge \alpha$, то $F(\beta) \ge F(\alpha)$.

**Свойство 3.** $p(\alpha \le x < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

**Свойство 4.** $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0; \quad F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1;$

$F(-\infty)=P(X<-\infty)=0; \quad F(\infty)=P(X<\infty)=1.$

*б) Плотность вероятности и её свойства*

Предел отношения вероятности попадания *СВ X* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$, называется плотностью распределения вероятности *СВ* в точке *x* и обозначается *f(x).*

$$f(x)=F'(x).$$

Вероятность попадания *СВ X* на $(\alpha, \beta)$ равна интегралу:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Функция распределения *F(x)*, выраженная через плотность распределения *f(x)*, имеет вид $F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

***Основные свойства плотности вероятности***

1. $f(x) \ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Если интервал возможных значений *СВ* имеет конечные пределы *(а, в),* то $f(x) = 0$ вне интервала $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = 1.$

## 3.2 Числовые характеристики

### а) Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (МОЖ) ДСВ Х называется сумма парных произведений возможных значений СВ на вероятности этих значений:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (20)$$

Для непрерывной случайной величины (НСВ):

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx,$$

где *f(x)* - плотность вероятности.

### Простейшие свойства математического ожидания

1) $M(C)=C.$
2) $M(CX)=CM(X).$
3) $M(X_1+\ldots+X_n) = M(X_1) + \ldots + M(X_n)$

### б) Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Характеристики, показывающие, насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра рассеивания (МОЖ), называются ***характеристиками рассеивания.***

Такими характеристиками являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, обозначается:

$$D(X)=M(X - a)^2$$

Из определения следует, что дисперсия *СВ Х* вычисляется по формуле:

$$D(X)=M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (21)$$

Дисперсия *СВ* обладает следующими свойствами:
1) $D(C) = 0;$
2) $D(CX) = C^2D(X).$
3) $D(X_1+\ldots+X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$
$D(X_1-\ldots-X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$

Дисперсия *СВ* является удобной характеристикой рассеивания возможных значений *СВ*, однако лишена наглядности, т.к. имеет размерность квадрата *СВ*.

Поэтому для характеристики отклонений *СВ X*, имеющей размерность, одинаковую с размерностью *СВ*, вводится понятие стандарта.

Средним квадратическим отклонением (СКО) *СВ X* называется арифметический корень из дисперсии, обозначается:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

## Решение типовых примеров

**Пример 1.** Ряд распределения СВ X – «Числа попаданий» имеет вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,24 | 0,46 | 0,26 | 0,04 |

Найти функцию распределения.

**Решение.**

При:

1) $x \le 0 \quad F(x) = P(X < 0) = 0$.

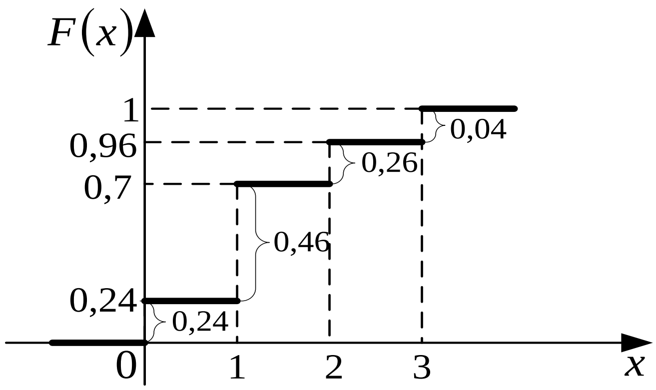
2) $0 < x \le 1 \quad F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0,24$.

3) $1 < x \le 2 \quad F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,24 + 0,46 = 0,7$.

4) $2 < x \le 3 \quad F(x) = P(X < 3) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0,7 + 0,26 = 0,96$.

5) $x > 3 \quad F(x) = P(X < 3) + P(X = 3) = 0,96 + 0,04 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,24, & 0 < x \le 1; \\ 0,7, & 1 < x \le 2; \\ 0,96, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



**Пример 2.** Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 1\\ a(x-1)^2, & при \quad 1<x\le 3\\ 1, & при \quad x>3.\end{cases}$$

Найти:

1. коэффициент *a*;
2. $P(1\le X<2)$;
3. построить график функции *F(x)*.

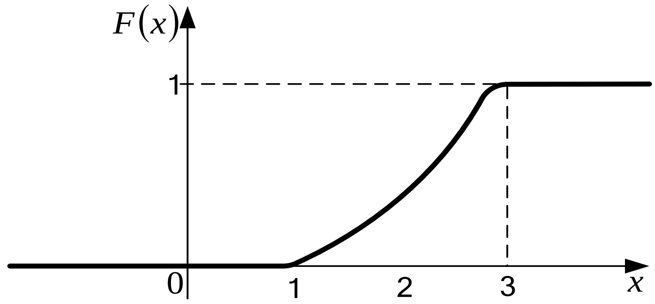
**Решение.**

1) Так как функция распределения непрерывной *СВ X* непрерывна, то при $x=3$ имеем:

$$a(3-1)^2=1; \quad a=\frac{1}{4};$$

2) $P(1\le X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{4}(2-1)^2-\frac{1}{4}(1-1)^2=\frac{1}{4};$

3)




**Пример 3. Независимые с**лучайные величины X и Y заданы законом распределения:

| X | -3 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,4 | 0,3 | … |

| Y | -1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 | … |

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z=3X-5Y^2$.

**Решение.** Найдем недостающие вероятности в законах распределения, зная, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1. Таким образом, P(X=3)=0,2, а P(Y=4)=0,4.

Из свойств дисперсии следует:

$$D(Z)=D(3X-5Y^2)=D(3X)+D(5Y^2)=9D(X)+25D(Y)$$

Найдем дисперсию случайных величин X и Y.

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=(-3)^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}2-$$
$$-((-3)\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2)=3$$
$$D(Y)=M(Y^2)\ -\ (M(Y))^2=(-1)^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+4^2\cdot 0{,}4-$$
$$-((-1)\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}4)=6{,}4$$

Следовательно, $D(Z)=9\cdot 3+25\cdot 6{,}4=187$.

Тогда $\sigma(Z)=\sqrt{187}$

**Пример 4.** Случайная величина X задана законом распределения:

| X | -3 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\text{i}}$ | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

Найти дисперсию случайной величины $Z=3X^2+2X+5$.

**Решение.** *D(Z)=M(Z²) - (M(Z))²*

Т.к. случайные величины X и $X^2$ не являются независимыми, то закон распределения случайной величины Z примет вид:

| Z | $3(-3)^2+2(-3)+5=26$ | 10 | 21 | 38 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\text{i}}$ | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

Тогда закон распределения случайной величины $Z^2$ примет вид:

| Z | 676 | 100 | 441 | 1444 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\text{i}}$ | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

Таким образом,

$$D(Z)=M(Z^2)\ -\ (M(Z))^2=676\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}4+441\cdot 0{,}3+1444\cdot 0{,}2-$$
$$-(26\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}4+21\cdot 0{,}3+38\cdot 0{,}2)=508{,}2$$

**Пример 5.** Обстреливается 5 целей. Вероятность поражения одной цели равна 0,6. Найти математическое ожидание числа пораженных целей и дисперсию.

**Решение.**

Пусть СВ X - число пораженных целей. Её возможные значения 0,1, 2, 3, 4, 5. Вычисляя вероятности возможных значений СВ по формуле Бернулли при $n=5$, $p=0{,}6$, $q=0{,}4$ получим следующий ряд распределения.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,01024 | 0,0768 | 0,2304 | 0,3456 | 0,2592 | 0,07776 |

По формуле $M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$, находим:

$$M\left(X\right)=0\cdot 0{,}01024+1\cdot 0{,}0768+2\cdot 0{,}2304++3\cdot 0{,}3456+4\cdot 0{,}2592+5\cdot 0{,}07776=3.$$

Для нахождения *D(X)* составим ряд:

| $x_i^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,01024 | 0,0768 | 0,2304 | 0,3456 | 0,2592 | 0,07776 |

$$D(X)=\sum_{i=0}^{6}x_i^2 p_i - m^2 = 0\cdot 0{,}01024 + 1\cdot 0{,}0768 + 4\cdot 0{,}2304 +$$

$$+9\cdot 0{,}3459 + 16\cdot 0{,}2592 + 25\cdot 0{,}07776 - 3^2 = 1{,}2027.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(\tilde{O})}; \qquad \sigma(X)=1{,}097.$$

**Пример 6.** Непрерывная СВ задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & при \quad 0\le x\le 2\\ 0 \quad , & при \quad x<0 \quad и \quad x>2.\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и *D(X)*.

**Решение.**

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad \text{и} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=\frac{3}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{20}}=0{,}387.$$

## *Задачи для решения в аудитории*

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

| $x_i$ | -2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,08 | 0,4 | 0,32 | 0,2 |

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность событий $A=\{x<2\}, B=\{1\le x<3\}, C=\{1<x\le 3\}$.

в) построить полигон и график функции $F(x)$.

г) найти M(X), D(X), σ(X).

д) Найти дисперсию случайной величины $Z=2X^2+4X-2$.

2. Студенты одной из групп экономического факультета сдают все экзамены только на хорошо и отлично. Вероятность получения отличной оценки равна 0,6, а хорошей – 0,4. В течение экзаменационной сессии студенту этой группы предстоит сдать 4 экзамена. Найти закон распределения случайной величины $X$ - числа полученных им баллов.

3. Известно, что в определенном городе 20 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека.

а) Составьте закон распределения числа людей предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом и постройте полигон распределения.

б) Найдите функцию распределения и постройте ее график.

4. На предприятии работает 200 человек. Из них 10 получают по 1800 рублей, 40 - по 1500 рублей, 80 человек - по 1200 рублей, 50 человек - по 1000 рублей и 20 человек - по 700 рублей. Определить среднюю заработную плату работника (рассматривая зарплату, как дискретную случайную величину), ее дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. Дисперсия случайной величины равна 5. Найти дисперсию величин: $(X-1);\ (-X);\ (3X+6)$ .

6. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$ , если $M(X) = 5,\ M(Y) = 3$ .

6. Непрерывная СВ задана функцией распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{при } 0<x\le 3;\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) составить *f(x)*.

б) найти: *M(X); D(X)*; $\sigma$; $P(1<X<3)$.

*а)* построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

## 3.3 Законы распределения случайных величин

### 3.3.1 Биномиальное, полиномиальное распределения

Дискретная случайная величина $X$ имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2,…, $m$,…, $n$ с вероятностями

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (22)$$

где $0 < p < 1; \quad q = 1 - p; \quad m = \overline{0,n}.$

Вероятность $P(X=m)$ находится по формуле Бернулли, следовательно, ***биномиальный закон распределения*** представляет собой закон распределения числа $X = m$ наступлений события $A$ в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид

| $x_i$ | 0 | 1 | … | $m$ | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $P(X=0)=q^n$ | $P(X=1)=C_n^1 p^1 q^{n-1}$ | … | $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ | … | $P(X=n)=p^n$ |

Для случайной величины $X$ распределенной по биномиальному закону, числовые характеристики находятся по формулам

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \qquad (23)$$

Биномиальный закон распределения используется в теории стрельбы, при описании функционирования систем массового обслуживания в теории стрельбы и так далее.

**Пример.** Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Решение

Из условия задачи следует, что $p = 0,75, \quad q = 0,25, \quad n = 6$.

По формуле 4.1 находим

$P_6(0) = 1 \cdot (0,25)^6 \approx 0,0002$;

$P_6(1) = 6 \cdot (0,75) \cdot (0,25)^5 \approx 0,004$;

$P_6(2) = 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 \approx 0,033$;

$P_6(3) = 20 \cdot (0,75)^3 \cdot (0,25)^3 \approx 0,132$;

$P_6(4) = 15 \cdot (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 \approx 0,297$;

$P_6(5) = 6 \cdot (0,75)^5 \cdot (0,25) \approx 0,356$;

$P_6(6) = 1 \cdot (0,75)^6 \approx 0,178$.

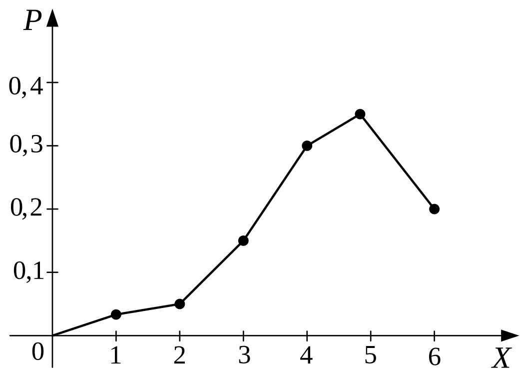
Закон распределения случайной величины $X$ - «числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу» можно задать следующей таблицей:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,000 | 0,004 | 0,033 | 0,132 | 0,297 | 0,356 | 0,178 |

Убедимся в том, что сумма всех вероятностей равна единице:

$0,004+0,033+0,132+0,297+0,356+0,178=1$.

Графическое представление этого биномиального распределения дано на рисунке




### 3.3.2 Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она принимает значение 0, 1, 2, …, $m$, ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}. \qquad (24)$$

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид

| $x_i$ | 0 | 1 | … | $m$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $P(X=0)=e^{-a}$ | $P(X=1)=\frac{ae^{-a}}{1!}$ | … | $P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}$ | … |

Закон Пуассона зависит от одного параметра $a$, который является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины, т.е. $M(X)=a$; $D(X)=a$.

Можно доказать, что распределение Пуассона с параметром $a=np$ можно приближенно применять вместо биномиального, когда число опытов $n$ очень велико, а вероятность $p$ очень мала, т.е. в каждом отдельном опыте событие $a$ появляется крайне редко.

**Пример.** Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени $T$ равна 0,002. Найти вероятность того, что за время $T$ откажут ровно три элемента. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказов за время $T$.

Решение

По условию задачи $n=1000$, $p=0,002$, $m=3$. События состоящие в том, что время $T$ три элемента откажут, независимы, число $n$ велико, а вероятность $p$ мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона, то есть формулой 4.4. Найдём $a$:

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2.$$

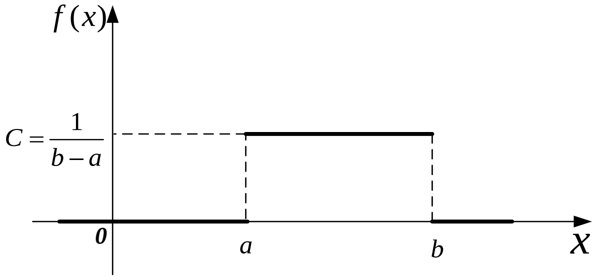
Тогда искомая вероятность равна $P_3 = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0{,}180447$.

Так как $M(X) = a; \quad D(X) = a$, то $M(X) = 2; \quad D(X) = 2$.

### 3.3.3 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина *X* имеет равномерное распределение на $[a,b]$, если на этом отрезке плотность вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, то есть, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < a, \\ C, & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0, & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

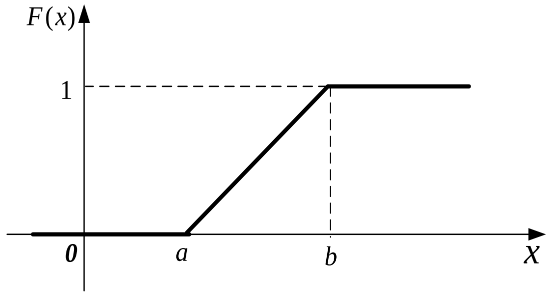



Тогда плотность вероятности *f(x)* имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \overline{\in} (a,b) \end{cases} \tag{25}$$

Функция распределения для равномерного распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{26}$$



Математическое ожидание и дисперсия случайной величины $X$, имеющей равномерное распределение

$$\begin{cases} M(X)=\dfrac{b+a}{2}, \\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}, \\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \qquad (27)$$

Одним из наиболее простых распределений системы непрерывных случайных величин является равномерное распределение.

Система двух непрерывных случайных величин ($X$, $У$) имеет равномерное распределение в области $\lambda$ плоскости $XOУ$, если плотность вероятности в точках области постоянна и равна нулю в остальных точках плоскости $XOУ$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & \textit{внутри} \quad D, \\ 0, & \textit{вне} \quad D, \end{cases}$$

где $S_D$ - площадь области $D$.

**Пример.** Случайная величина $X$ равномерно распределена на отрезке $[2,7]$. Записать плотность распределения $f(x)$, функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины. Найти её математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Плотность распределения $f(x)$ случайной величины $X$, равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$, определяется формулой 4.5. В данном случае $a=2, \quad b=7, \quad b-a=5$; следовательно,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5} & \textit{при} \quad 2\le x\le 7, \\ 0 & \textit{при} \quad x<2 \textit{ или } x>7. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ определяется формулой 4.6

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 2, \\ \dfrac{x-2}{5} & \textit{при} \quad 2<x<7, \\ 1 & \textit{при} \quad x\ge 7. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины $X$ равномерно распределенной на отрезке $[2,7]$, вычисляется по формуле 4.7

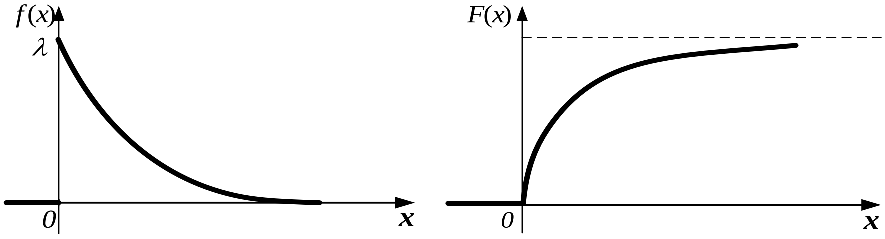
$$M(X)=\frac{2+7}{2}=4{,}5, \qquad D(X)=\frac{(7-2)^2}{12}=\frac{25}{12}=2{,}08.$$

### 3.3.4 Показательное распределение

Непрерывная случайная величина $X$ имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если её плотность вероятности имеет вид

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0,\\ 0, & при \quad x<0.\end{cases} \qquad (28)$$

Положительная величина $\lambda$, называется параметром распределения.




Функция распределения непрерывной случайной величины $X$, имеющей показательное распределение, имеет вид

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases} \qquad (29)$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$\left.\begin{aligned} M(X)&=\frac{1}{\lambda}\\ D(\tilde{O})&=\frac{1}{\lambda^2}\\ \sigma\left(X\right)&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, как закон распределения времени наработки на отказ (безотказной работы) сложных технических систем, их подсистем, агрегатов и элементов.

Согласно определению ***вероятность безотказной работы*** некоторого технического устройства до первого отказа выражается ***функцией*** надежности

$$p(t)=P(T\ge t),$$

где $T$ – случайная величина - время наработки на отказ.

Выражая её через противоположное событие и предполагая $T$ – случайная величина распределенная по показательному закону, получим

$$p(t)=1-P(T<t)=1-F\left(t\right)=e^{-\lambda t}$$

Вероятность отказа за время $t$ равна

$$q(t)=1-p(t)=1-e^{-\lambda t}=F\left(t\right),$$

а плотность вероятности случайной величины $T$ связана с вероятностью отказа соотношением

$$f(t)=F'(t)=q'(t)$$

Среднее время наработки на отказ (или математическое ожидание этого времени) в соответствии с (4.10) равно

$$m_t=\frac{1}{\lambda}$$

Параметр распределения $\lambda$ играет роль интенсивности отказов.

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. В частности интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром $\lambda$, равным интенсивности потока

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

**Пример.** Случайная величина $X$ подчинена показательному закону распределения с параметром $\mu$: $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ ï ðè $x > 0$.

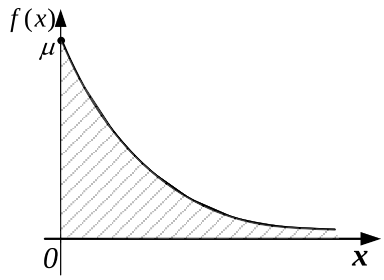
1) Построить кривую распределения;

2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

3) найти вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

Решение

1)




2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

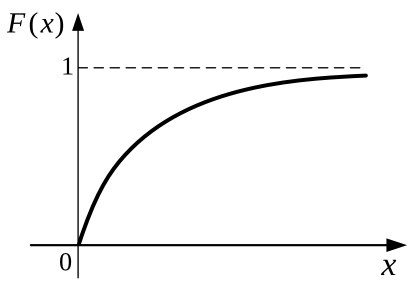
$x \le 0 \qquad F(x) = 0$

$$x > 0 \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \mu e^{-\mu x}dx = \mu \cdot \frac{1}{-\mu}\int\limits_{0}^{x} e^{-\mu x} d(-\mu_x) =$$

$$= -e^{-\mu x}\Big|_0^x = -e^{-\mu x} + 1 = 1 - e^{-\mu x},$$

тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-\mu x}, & при \quad x > 0. \end{cases}$$




3) $m_x = \dfrac{1}{\mu}; \quad P\left\{X < \dfrac{1}{\mu}\right\} = F\left(\dfrac{1}{\mu}\right) = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. По цели производится 10 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6.

2. В урне находятся 8 белых, 5 красных и 2 голубых шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Найти вероятность, что появится следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов.

3 Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно три абонента, б) менее трёх абонентов, в) более трёх абонентов, г) хотя бы один абонент.

4. Найти среднее число $\lambda$ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1 ампера. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 ампера.

6. Самолет, выполняющий боевой полет, пересекает зону ПВО противника, где по нему действует поток атак средств ПВО. Предполагая поток атак средств ПВО простейшим с интенсивностью $\lambda$ = 0,10 ат/час, определить вероятность того, что следующая атака после очередной атаки средств ПВО произойдет в течение 5 минут.

7. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Произведено пять выстрелов. Построить ряд распределения числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ – числа попаданий в мишень.

8. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течении одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

9. Случайная величина $T$ – время работы радиолампы – имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 1000 часов, если среднее время работы радиоволн 600 часов.

10. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов за час. Считая число запросов случайной величиной, распределённой по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 минуты:

а) поступит ровно 3 запроса;

б) поступит хотя бы один запрос.

11. Случайная величина $T$ – время безотказной работы некоторых элементов радиоаппаратуры самолета – подчинена показательному распределению

$$f(t)=\begin{cases} Ae^{-0,1t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad A = const > 0$$

Найти: а) постоянную $A$;

б) $F(t)$;

в) вероятность безотказной работы (надежность) элементов радиоаппаратуры в течение заданного времени $T$

г) $M(T)$ и $D(T)$.

12. Непрерывная величина $X$ распределена по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ 2e^{-2x}, & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений величины $X$ в интервал $(0{,}1;\,0{,}7)$.

13. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ждать очередной автобус менее 3 мин.

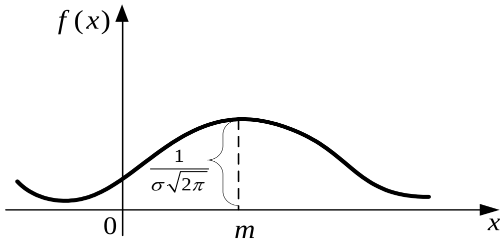
14. Найти дифференциальную, интегральную функции распределения случайной величины $X$, распределенной равномерно на интервале (2;8) и найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

## 3.4. Нормальный закон распределения

Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с параметрами $m$ и $\sigma$, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (31)$$

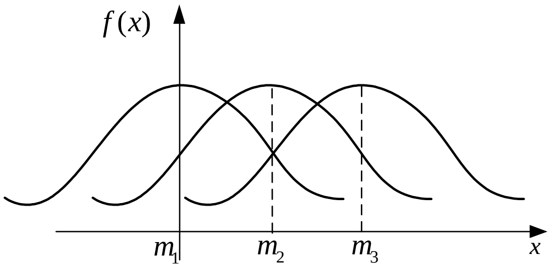
Нормальный закон называют ещё законом Гаусса (1777-1855гг, немецкий математик), получившего впервые этот закон распределения как закон распределения ошибок при астрономических (точных) наблюдениях.

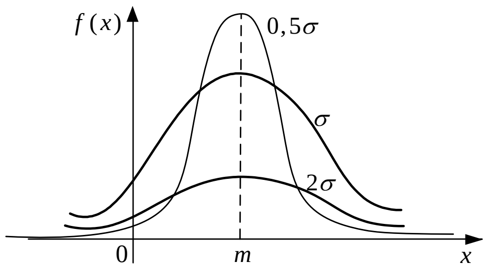



Кривую распределения называют ещё кривой Гаусса, она зависит от параметров $m$ и $\sigma$. Максимальная ордината кривой, равная $f_{\max}(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

достигается при $x=m$

При изменении параметра $m$ кривая смещается вдоль числовой оси, не изменяя формы.




При изменении параметра $\sigma$ кривая распределения изменяет свою форму: при уменьшений $\sigma$ (рассеивание случайной величины $X$ уменьшается) кривая вытягивается вверх, а при увеличении $\sigma$ (рассеивание случайной величины $X$ увеличивается) она сплющивается и прижимается к оси $Ox$.

Числовые характеристики нормального распределения

$$M(X)=m.$$

Величина $m$ – математическое ожидание нормально распределенной случайной величины $X$, называется её «центром рассеивания».

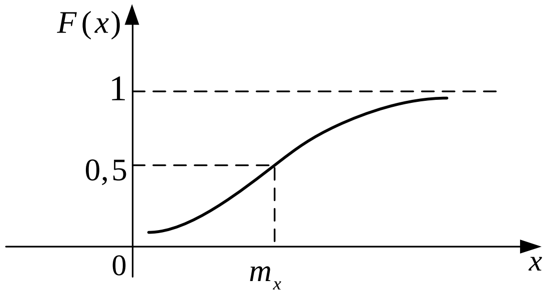
$$D(X)=\sigma^2.$$

То есть дисперсия случайной величины $X$ распределенной по нормальному закону есть не что иное как среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(\tilde{O})}=\sigma.$$

Функция распределения *F(x)* случайной величины *X* распределенной по нормальному закону или ***нормальная функция распределения*** задается выражением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (32)$$

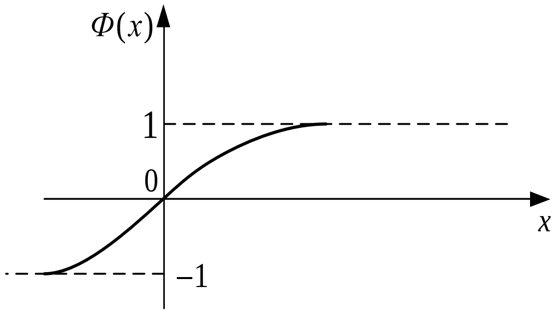



Так как $\int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не выражается через элементарные функции, то для его вычисления пользуются таблицами значений специальной функции, которая называется ***функцией Лапласа***, или ***нормальным интегралом вероятности*** и имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (33)$$

**Функция Лапласа обладает следующими свойствами:**

1. $\Phi(0) = 0$. Следует из того, что при $x = 0$, пределы интегрирования совпадают.
2. $\Phi(\infty) = 1$.
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ есть функция нечётная.
4. Функция Лапласа является монотонно возрастающей функцией.




При $x > 5$, значение функции Лапласа практически равно единице. Учитывая, что

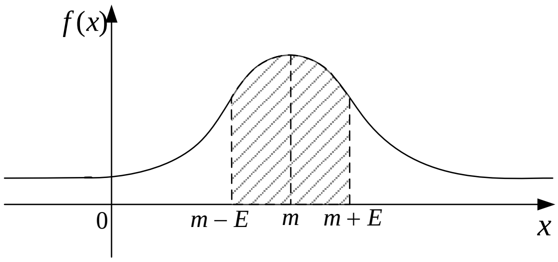
$F(x) = P(-\infty < X < x)$, для нормального закона, её можно представить через *Φ(x)* в виде

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x+m}{\sigma}\right)\right) \qquad (34)$$

Для характеристики ширины нормальной кривой вместо среднего квадратического отклонения в теории стрельбы используют вероятное отклонение $E$.

Вероятным отклонением называется половина длины участка, симметричного относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна 0,5, т.е. $P(|x-m|<E)=0,5$.

Геометрически вероятное отклонение *E* есть половина длины участка оси *Ox*, симметричного относительно *МОЖ*, на который опирается половина площади, ограниченной кривой распределения.




Полагая в выражении нормального закона $\sigma=\dfrac{E}{\rho\sqrt{2}}$,

где $\rho=0,477$, получим ещё одну форму нормального закона

$$f(x)=\frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\rho^2(x-m)^2}{E^2}}. \qquad (35)$$

Если случайная величина *X* задана плотностью вероятности *f (x),* то вероятность попадания случайной величины *X* на отрезок $[\alpha,\beta]$ определяется по формуле

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)\right). \qquad (36)$$

Рассмотрим важный частный случай формулы (36), когда $[\alpha,\beta]$ симметричен относительно математического ожидания

$$P(|X-m|<e)=P(m-e<X<m+e)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right)\right)=\Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right).$$

Итак,

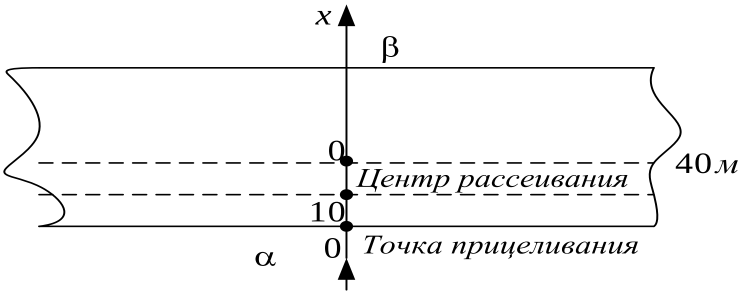
$$P(|X-m|<e)=\Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right). \qquad (37)$$

Используя формулу (37), найти $P(|X-m|<3\sigma)=\Phi(3)=0,9972$.

Таким образом, для нормально распределенной случайной величины *X* с параметрами *m* и σ выполнение неравенства $|X-m|<3\sigma$ практически достоверно, В этом заключается так называемое правило ***трёх сигм.***

**Пример.** Производится бомбометание по мосту длиной 200м и шириной 40м. Бомбардировщик заходит поперек моста, прицеливание производится по его передней кромке. Ошибка в направлении захода на цель – случайная величина *X*, распределенная по нормальному закону с параметрами *m* = 10м, σ = 20м. Определить вероятность попадания в мост одной бомбы.

Решение




Вероятность попадания в длинные и узкие цели (мосты, шоссе, ВПП аэродрома, плотина ГЭС и т.д.) при бомбометании и стрельбе вычисляется как вероятность попадания на отрезок, так как при заходе поперек цели существенна лишь по дальности, а по направлению (боковая ошибка), попадание обеспечено (длина превышает максимальную ошибку в этом направлении). Поместим начало координат в точку прицеливания, за положительное направление примем направление захода.

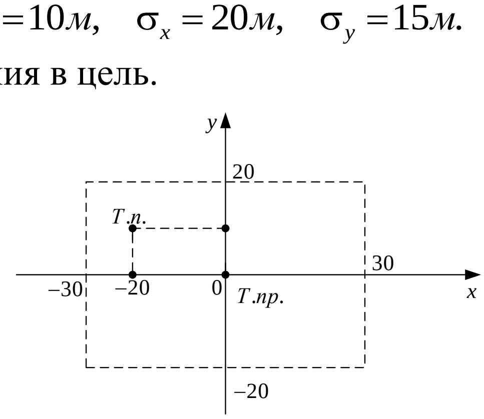
Тогда $\lambda = 0$; $\rho = 40м$; $m = 10м$; $\sigma = 20м$. По формуле (4.18) и таблицам функции Лапласа найдем вероятность попадания в мост

$$P\left(0 \le X \le 40\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{40-10}{20}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{20}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(1,5\right) - \Phi\left(0,5\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0,8664 + 0,3829\right) = \frac{1,2493}{2} = 0,62465.$$

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Производится стрельба с самолета по цели, имеющей вид прямоугольника с размерами (60 × 40)м$^2$. Прицеливание производится по центру цели. Заход на цель вдоль оси *Ox*. Характеристики рассеивания средств поражения: $m_x = 20м$, $m_y = 10м$, $\sigma_x = 20м$, $\sigma_y = 15м$. Какова вероятность попадания средств поражения в цель.



2. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стенфорда-Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Записать выражения для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения. Построить графики этих функций.

3. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб. и средним квадратичным отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятности того, что цена акции окажется: а) не ниже 15,50 руб.; б) не выше 15,00 руб.

4. Случайная величина $X$ распределена нормально со средним $M(X) = 10$, а вероятность её попадания в интервал $(5;15)$ равна 0,8. Найти вероятность попадания $X$ в интервал $(9;10)$.

## 35 Предельные теоремы теории вероятностей

Под ***законом больших чисел*** в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

Под законом больших чисел в ***узком*** смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к определенным постоянным, неслучайным величинам.

Неравенство Чебышева:

Для любой с.в. $X$, имеющей математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ справедливо неравенство

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева можно заменить равносильным

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева справедливо и для дискретных, и для непрерывных случайных величин.

Если случайная величина $X=m$ имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X)=a=np$ и дисперсией $D(X)=npq$, то неравенство Чебышева имеет вид

$$P\left(\left|m-np\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Одной из важнейших форм закона больших чисел является теорема Чебышева.

**Теорема Чебышева** Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и существует такое число $c>0$, что $D(X_i)\leq c\ (i=1,2,3,\ldots)$, то для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Из последнего неравенства следует предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема Чебышева показывает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин как угодно мало отличается от среднего арифметического их математических ожиданий.

**Теорема Бернулли.** Если в условиях схемы Бернулли вероятность наступления события в одном опыте равна p, число наступлений этого события при n независимых испытаниях равна m, то для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \text{ или } \quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)<\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

**Центральная предельная теорема. Теорема Ляпунова**

Если $X_1, X_2, X_3, ... X_n, ...$ независимые случайные величины, имеющие математическое ожидание $a_i$, дисперсию $\sigma_i^2$ и конечные абсолютные центральные моменты третьего порядка, удовлетворяющие условиям $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|\mu_3|_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$, то при неограниченном увеличении $n$ закон распределения

нормированной суммы $Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}M(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}}$ сходится по вероятности к

нормальному закону с плотностью вероятностей $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, \ -\infty<z<+\infty$, для которого $a=0, \quad \sigma=1.$

Частными случаями центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин являются теоремы Муавра – Лапласа. Нормированная сумма $Z_n$ будет иметь вид

$$Z_n=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

**Теорема Муавра - Лапласа (локальная)** Если $0<p<1$, то равномерно для всех $m$, удовлетворяющих неравенствам $a\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le b$,

где $a$ и $b$ - любые заданные постоянные числа имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}-p_{m,n}\right)=0.$$

На практике локальная теорема используется при больших значениях $n$ для вычисления вероятности того, что некоторое событие $A$ наступает $m$ раз в $n$ испытаниях. Эту вероятность находят по приближенной формуле

$$P(Z_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(z), \text{ где } \quad z=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \ \varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Функция $\varphi(z)$ - четная, т.е. $\varphi(-z)=\varphi(z)$ и для неё составлены таблицы (Приложение 2).

Если требуется найти вероятность неравенства $m_1\le x\le m_2$, то применяют интегральную теорему.

**Теорема Муавра - Лапласа (интегральная)** Если производится $n$ независимых опытов, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью $p$, то для любого интервала ($m_1, m_2$) справедливо соотношение

$$P\left(m_1 < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < m_2\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

$q = 1 - p$, $\Phi(x)$ - функция Лапласа (Приложение 3).

## Решение типовых примеров

1. Среднее значение длины деталей, изготовленной цехом, равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5.

Решение

Т.к. $M(X) = 50$, то условие $49{,}5 < x < 50{,}5$ в котором $CB$ $X$ обозначает возможную длину детали, можно заменить на условие $\left|\mathrm{X} - \mathrm{M}(\mathrm{X})\right| \le 0{,}5$.

Используем неравенство Чебышева: $\varepsilon = 0{,}5$ и $D(X) = 0{,}1$.

$$P\left(\left|X - 50\right| \le 0{,}5\right) \ge 1 - \frac{0{,}1}{(0{,}5)^2} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}6\cdot$$

2. Вероятность появления события А в каждом испытании равна $\frac{1}{2}$. Пользуясь неравенством Чебышева оценить вероятность того, что число X появлений события А будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события А в 100 независимых испытаниях:

$$M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Найдем максимальную разность между назначенным числом появлений события и математическим ожиданием

M(X)=50: $\varepsilon = 60 - 50 = 10$.

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставив $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $\varepsilon = 10$, получим

$$P\left(\left|X - 50\right| < 10\right) \ge 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75.$$

3. При каком числе независимых испытаний вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,2$ превысит 0,96, если вероятность появления события в отдельном испытании p = 0,7 ?

Решение

$p = 0,7 \Rightarrow q = 0,3, \quad \varepsilon = 0,2$. Требуется определить $n$ с помощью неравенства Чебышева

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Условие $P > 0,96$ равносильно неравенству

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} < 0,04, \qquad n > \frac{pq}{0,04\varepsilon^2}; \quad n > \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,2 \cdot 0,04} = \frac{0,21}{0,0016} = 131,25 .$$

Следовательно, требуемое неравенство выполняется при числе независимых испытаний, начиная со 132.

### *Задачи для решения в аудитории*

1. Вероятность того, что изделие некоторого производства окажется нестандартным, равна 0,01. Чему равна вероятность, что в партии из 1000 наудачу выбранных изделий окажется ровно 5 нестандартных?

2. На некотором производстве вероятность того, что изделие окажется нестандартным, равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий окажется не более 12 нестандартных.

3. Дано: $P(|X-m|>\varepsilon)>0{,}9$ и $D(x)=0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

4. Вероятность наступления события А в каждом из 1500 испытаний равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события А от математического ожидания будет более 40.

5. Число дождливых дней в году для данной местности является случайной величиной X с M(X)=100. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

# ГЛАВА 3 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

## 3.1 Предмет и задачи математической статистики. Вариационные ряды.

Математическая статистика используется в различных областях знаний: в экономике, опытном деле, земледелии, животноводстве и т.д., т. е. там, где для изучения процессов и явлений недостаточно только качественной характеристики. Чтобы глубоко познать сущность процессов, необходимы количественные характеристики в виде измерений, наблюдений с их последующим анализом, обобщением и выводами.

***Математическая статистика*** – это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.

Результаты измерений (наблюдений) называют ***статистическими данными***..

Вся исследуемая совокупность однородных объектов называется ***генеральной совокупностью***.

Множество из **n**- объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется ***выборочной совокупностью*** или ***выборкой*** (**n**- объем выборки).

Одним из основных способов сбора статистических данных является ***выборочный метод.***

Метод, основанный на том, что по данным обследования выборки, выделенной из данной генеральной совокупности, делается заключение обо всей генеральной совокупности, называется ***выборочным методом***.

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется ***вариантом*** $(x_i)$, а изменения этого значения – ***варьированием.***

Результаты наблюдений, в общем случае - ряд чисел, расположены в беспорядке, поэтому их необходимо упорядочить.

***Вариационным рядом*** называется ранжирование в порядке возрастания вариант с соответствующими им частотами (ранжир - в переводе с фр.- «ставить в ряд по росту»).

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется ***частотой*** или ***весом*** соответствующего варианта и обозначается $m_i$, где $i$ - индекс варианта.

Отношение частоты данного варианта к объему совокупности называется ***относительной частотой*** $(w_i)$ или ***частостью*** этого варианта. $\boxed{w_i = \frac{m_i}{n}}$

***Дискретным*** вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов $x_i$ с соответствующими им частотами $m_i$ или частостями $(w_i)$.

В общем виде его можно записать так:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | $m_1$ | $m_2$ | $\dots$ | $m_n$ |

Вариационный ряд часто дополнительно характеризуется накопленными частотами или накопленными частостями.

***Накопленные частоты*** характеризуют число членов данной совокупности, у которых рассматриваемый признак принимает значения, не превышающие данного варианта.

***Накопленные частости*** – результаты последовательного суммирования частостей всех вариантов, включая частость данного варианта.

Кроме дискретных вариационных рядов широкое применение имеют ***непрерывные (интервальные)*** вариационные ряды.

***Интервальным*** вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частостями попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Интервальный ряд целесообразно построить, если число возможных значений дискретной величины велико или признак является непрерывным, т.е. может принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов, на которые разбивается весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в соответствии с полученной упорядоченной совокупностью частичных интервалов сгруппировать результаты наблюдений.

Для определения величины частичного интервала воспользуемся формулой Стерджесса:

$$\boxed{h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3{,}322\lg n}}, \text{ где } \boxed{1 + 3{,}322\lg n} \text{ -число интервалов.}$$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину:

$$\boxed{X_{нач.} = X_{\min} - \frac{h}{2}}$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала **h**.

Теперь, просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значение случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

**Пример :** Пусть дан ряд распределения хозяйств по количеству рабочих на 100 га с/х угодий $(n = 60)$:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 6 | 8 | 6 | 10 | 11 | 7 | 10 | 12 | 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 8 | 6 | 11 | 9 | 11 | 9 | 10 |
| 11 | 9 | 10 | 7 | 8 | 8 | 8 | 11 | 9 | 8 | 7 | 5 | 9 | 7 | 7 | 14 | 11 | 9 | 8 | 7 | 4 |
| 7 | 5 | 5 | 10 | 7 | 7 | 5 | 8 | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | 13 | 12 | 11 | 15 | 6 | | | |

Построить интервальный вариационный ряд.

Решение. Для определения числа групп подставим значение $n=60$ в формулу Стерджесса:

$$k = 1 + 3,322 \lg 60 \approx 6,907; \quad k = 7$$

Найдем длину частичного интервала: $h = \dfrac{X_{\max} - X_{\min}}{k} = \dfrac{15-4}{7} = \dfrac{11}{7} \approx 1,6$

Построим интервальный вариационный ряд, для этого в качестве начального значения используем $X_{\min}$.

| Группы хозяйств по численности работников на 100 га с/х угодий | Число хоз-в в группе $m_i$ | Накопленное число хоз-в $S_i$ | Относительная частота $\widehat{p}_i$ |
|---|---|---|---|
| 4- 5,6 | 5 | 5 | 5/60 |
| 5,61- 7,2 | 17 | 22 | 17/60 |
| 7,21- 8,8 | 9 | 31 | 9/60 |
| 8,81- 10,4 | 15 | 46 | 15/60 |
| 10,41- 12,0 | 10 | 56 | 10/60 |
| 12,01- 13,6 | 1 | 57 | 1/60 |
| 13,61- 15,2 | 3 | 60 | 3/60 |
| Итого | 60 | - | 1 |

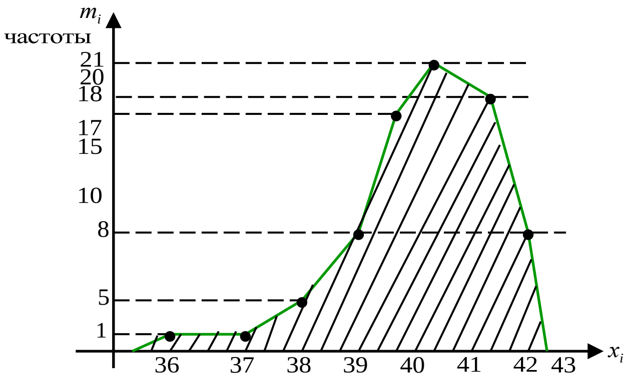
Иногда интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным.

В этом случае серединное значение $i-го$ интервала принимают за вариант $x_i$, а соответствующую интервальную частоту $m_i$- за частоту этого интервала.

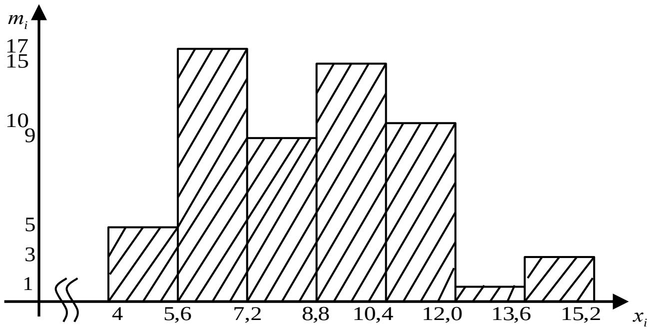
## 3.2 Графическое изображение вариационных рядов.

Графическое изображение позволяет представить в наглядной форме закономерности варьирования значений признаков с помощью полигона, гистограммы, кумуляты и огивы.

***Полигоном*** (для дискретного вариационного ряда) называется ломанная, соединяющая на плоскости точки с координатами $(x_i; m_i)$.



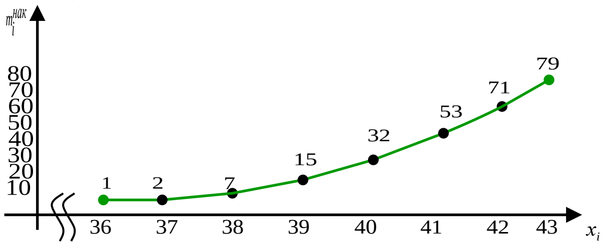

***Гистограммой*** (для интервального вариационного ряда) называют ступенчатую фигуру, состоящую и прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $(x_{i-1};x_i)$, а высотами - частоты $m_i$.



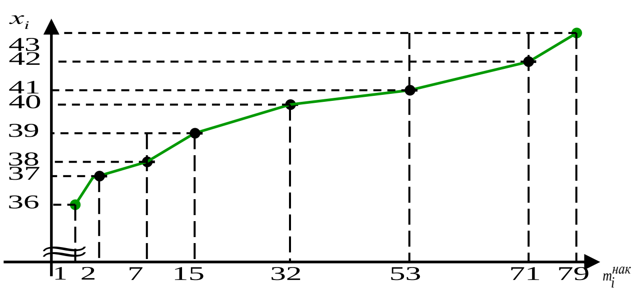

Если в вариационном ряду вместо частот взяты соответственно накопленные частоты, то полученный ряд называется ***кумулятивным рядом*** (кумуляция – от латинского «скопление»).

***Кумулятой*** называется ломанная, соединяющая на плоскости точки вида $\left(x_i;m_i^{нак}\right)$.

Кумуляту иначе называют полигоном накопленных частот.




Если по оси абсцисс откладывать накопленные частоты, а по оси ординат - значение признака, затем полученные точки соединить отрезками, то получится ***огива.***



## 3.3 Числовые характеристики вариационных рядов.

Вариационные ряды позволяют получить первое представление об изучаемом распределении. Далее необходимо исследовать числовые характеристики распределения (аналогичные характеристикам распределения теории вероятностей): характеристики **положения** (средняя арифметическая, мода, медиана); характеристики **рассеивания** (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации); характеристики **меры скошенности** (коэффициент асимметрии) и **островершинности** (эксцесс) распределения.

***Средней арифметической*** $\left(\overline{X}\right)$ дискретного вариационного ряда называется отношение суммы произведений вариантов на соответствующие частоты к объему совокупности: $\overline{X}=\dfrac{\sum x_i m_i}{n}$ $(1)$

Вычисленное по формуле $(1)$ среднее арифметическое называется **взвешенным**, так как частоты $m_i$ называются **весами,** а операция умножения $x_i$ на $m_i$ - **взвешиванием.**

Для интервального вариационного ряда за $x_i$ принимают середину $i-го$ интервала, а за $m_i$ - соответствующую интервальную частоту.

***Модой*** $\left(\widehat{M}_0(x)\right)$ дискретного вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Для интервальных вариационных рядов при нахождении $\widehat{M}_0(x)$ используют формулу: $\boxed{\widehat{M}_0(x)=x_0+h\cdot\dfrac{m_i-m_{i-1}}{(m_i-m_{i-1})+(m_i-m_{i+1})}}$, где

$x_0$ - начало модального интервала; $h$ - длина частичного интервала; $m_i$ - частота модального интервала; $m_{i-1}$ - частота предмодального интервала; $m_{i+1}$ - частота послемодального интервала.

***Медианой*** $\left(\widehat{M}_e(x)\right)$ дискретного вариационного ряда называется вариант, делящий ряд на две равные части.

Если дискретный вариационный ряд имеет **четное** $(2n)$ число членов, то:

$$\boxed{\widehat{M}_e(x)=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}}.$$

Если дискретный вариационный ряд имеет **нечетное** $(2n-1)$ число значений варьирующего признака, расположенных в порядке возрастания, то медианой этого распределения является вариант $x_n$: $\boxed{\widehat{M}_e(x)=x_n}$

При нахождении $\widehat{M}_e(x)$ для интервальных вариационных рядов используют формулу:

$$\boxed{\widehat{M}_e(x) = x_0 + h \cdot \frac{0{,}5n - m_{i-1}^{нак}}{m_i}}$$ , где $x_0$ - начало медианного интервала;

$h$ - длина частичного интервала; $n$ - объем совокупности;

$m_{i-1}^{нак}$ - накопленная частота интервала, предшествующего медианному; $m_i$ - частота медианного интервала.

**Пример**: Найти $\widehat{M}_e(x)$ по условию задачи пункта 3.1.

$n = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2} = 30 \Rightarrow$ медиана расположена в интервале $7{,}21 - 8{,}8$

$$\widehat{M}_e(x) = 7{,}21 + 1{,}6\frac{0{,}5 \cdot 60 - 22}{9} \approx 8{,}62$$

***Дисперсия*** вариационного ряда (как дискретного, так и интервального) характеризует средний квадрат отклонения значения признака от его среднего значения: $\boxed{D(x) = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot m_i}{n}}$

***Среднее квадратическое отклонение*** вариационного ряда распределения характеризует те же значения, что и дисперсия, но измеряется в единицах варьирующего признака: $\boxed{\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot m_i}{n}}}$

***Коэффициент вариации*** характеризует относительное значение среднего квадратического отклонения и служит для сравнения колеблемости несоизмеримых показателей: $\boxed{V = \frac{\sigma(x)}{\overline{X}} \cdot 100\%}$

Коэффициент асимметрии - $\boxed{\widehat{A} = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^3 \cdot m_i}{n \cdot \sigma^3(x)}}$

Эксцесс - $\boxed{\widehat{E} = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^4 \cdot m_i}{n \cdot \sigma^4(x)} - 3}$

**Пример**: Рассчитать дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесс для задачи пункта 3.1. Сделать выводы.

Построим вспомогательную таблицу.

| Группы хоз-в по численности работников на 100 га с/х угодий, чех. | Среднее значение интервала, $x_i$ | Число хоз-в в группе $m_i$ | $x_i \cdot m_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot m_i$ | $\frac{x_i - \overline{x}}{\hat{\sigma}(x)}$ | $\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\hat{\sigma}(x)}\right)^3 \cdot m_i$ | $\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\hat{\sigma}(x)}\right)^4 \cdot m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4-5,6 | 4,8 | 5 | 24 | -3,813 | 72,708 | -1,559 | -18,954 | 29,554 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,61-7,2 | 6,4 | 17 | 108,8 | -2,213 | 83,280 | -0,905 | -12,601 | 11,404 |
| 7,21-8,8 | 8 | 9 | 72 | -0,613 | 3,386 | -0,251 | -0,142 | 0,036 |
| 8,81-10,4 | 9,6 | 15 | 144 | 0,987 | 14,603 | 0,403 | 0,985 | 0,397 |
| 10,41-12,0 | 11,2 | 10 | 112 | 2,587 | 66,908 | 1,058 | 11,832 | 12,514 |
| 12,01-13,6 | 12,8 | 1 | 12,8 | 4,187 | 17,528 | 1,712 | 5,017 | 8,588 |
| 13,61-15,2 | 14,4 | 3 | 43,2 | 5,787 | 100,457 | 2,366 | 39,740 | 94,030 |
| Итого | - | 60 | 516,8 | 0 | 358,869 | - | 25,876 | 156,523 |

$$\bar{x} = \frac{516,8}{60} = 8,613$$

$$D(x) = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot m_i}{n} = \frac{358,869}{60} = 5,981$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{5,981} \approx 2,446$$

$$V = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{2,446}{8,613} \cdot 100\% = 28,4\%$$

Таким образом, средняя численность работников на 100 га с/х угодий по исследуемой совокупности хозяйств составила 8,61 чел. Плотность работников в среднем колебалась в промежутке $\boxed{\bar{x} \pm \sigma(x)}$ = 8,61±2,45, т.е. от 6,16 до 11,06 чел. на 100 га с/х угодий.

Этот интервал, а так же коэффициент вариации показывает, что имеются большие различия в обеспечении хозяйств рабочей силой.

$$\hat{A} = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^3 \cdot m_i}{n \cdot \sigma^3(x)} = \frac{25,876}{60} = 0,43$$

$$\hat{E} = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^4 \cdot m_i}{n \cdot \sigma^4(x)} - 3 = \frac{156,523}{60} - 3 = -0,39$$

Найденное значение коэффициента асимметрии (не достаточно близкое к нулю) указывает, что распределение не симметрично. Эксцесс также отличен от нуля, что говорит о возможном отличии распределения от нормального.

## 3.4 Выборочный метод. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

В реальных условиях обычно бывает трудно или экономически нецелесообразно, а иногда и невозможно, исследовать всю совокупность, характеризующую изучаемый признак (генеральную совокупность). Поэтому на практике широко применяется выборочное наблюдение, когда обрабатывается часть генеральной совокупности (выборочная совокупность). Свойства (закон распределения и его параметры) генеральной совокупности неизвестны, поэтому возникает задача их оценки по выборке. Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была репрезентативной (представительной). Репрезентативность в силу закона больших чисел, достигается случайностью отбора.

После осуществления выборки возникает задача оценки числовых характеристик генеральной совокупности по элементам выборочной совокупности. Различают точечные и интервальные оценки.

***Точечной оценкой*** характеристики генеральной совокупности называется число, определяемое по выборке.

Пусть $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_n$ выборочная характеристика, вычисленная по результатам n наблюдений величины X, используемая в качестве оценки $\Theta$ - характеристики генеральной совокупности (в качестве $\Theta$ может быть $M(x)$; $D(x)$ и т.д.).

Качество оценки $\hat{\Theta}$ устанавливается по 3-м свойствам:

1. **Состоятельность.** Оценка $\hat{\Theta}_n$ является состоятельной оценкой генеральной совокупности $\Theta$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\Theta}_n - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1}$

Это означает, что при увеличении объема выборки **n** выборочная характеристика стремится к соответствующей характеристике генеральной совокупности $\left(\hat{\Theta}_n \to \Theta\right)$.

2. **Несмещенность.** Оценка $\hat{\Theta}_n$ генеральной характеристики $\Theta$ называется несмещенной, если для любого фиксированного числа наблюдений **n** выполняется равенство: $\boxed{M\left(\hat{\Theta}_n\right) = \Theta}$

3. **Эффективность.** Несмещенная оценка $\hat{\Theta}_n$ генеральной характеристики $\Theta$ называется несмещенной эффективной, если среди всех подобных оценок той же характеристики она имеет наименьшую дисперсию: $\boxed{D\left(\hat{\Theta}_n\right) \to \min}$

Статистики $\bar{x}$ и $\hat{p}_i$ являются состоятельными, несмещенными и эффективными характеристиками математического ожидания $M(x)$ и вероятности $P$ соответственно.

Выборочная дисперсия $D(x) = \sigma^2(x)$ не обладает свойством несмещенности. На практике используют **исправленную выборочную дисперсию** $S^2$**,** которая является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma^2(x) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot m_i}{n} = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot m_i}{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot m_i}{n-1}}$$, где $S$ – стандартное отклонение.

***Интервальной*** называют оценку, которая определяется двумя числами - границами интервала.

Интервальная оценка позволяет ответить на вопрос: внутри какого интервала, и с какой вероятностью находится неизвестное значение оцениваемого параметра генеральной совокупности?

Пусть $\hat{\Theta}$ точечная оценка параметра $\Theta$. Чем меньше разность $\hat{\Theta}-\Theta$, тем точнее и лучше оценка. Обычно говорят о **доверительной вероятности** $\boxed{p=1-\alpha}$, с которой $\Theta$ будет находиться в интервале

$$\boxed{\hat{\Theta}-\Delta<\Theta<\hat{\Theta}+\Delta}\text{ , где}$$

$\Delta(\Delta>0)$ - предельная ошибка выборки, которая может быть задана наперед, либо вычислена; $\alpha$ - риск или уровень значимости (вероятность того, что неравенство будет неверным).

В качестве $(1-\alpha)$ принимают значения $0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}999$. Доверительная вероятность показывает, что в $(1-\alpha)\cdot 100\%$ случаев оценка будет накрываться указанным интервалом.

**Точечная оценка** математического ожидания $M(x)=a$ определяется как средняя арифметическая: $\boxed{\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i\cdot m_i}$.

Для построения доверительного интервала параметра $a$ - математического ожидания нормального распределения, составляют выборочную характеристику (статистику), функционально зависимую от наблюдений и связанную с $a$, например:

1. для **повторного отбора**: $\boxed{u=\dfrac{\bar{x}-a}{\dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}}}$

Статистика **u** распределена по нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a=0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(x)=1$. Отсюда: $\boxed{P\left(|u|<U_{\alpha/2}\right)=1-\sigma(x)}$ или $\boxed{2\Phi\left(U_{\alpha/2}\right)=1-\sigma(x)}$, где

Ф- функция Лапласа.

$U_{\alpha/2}$ - квантиль нормального закона распределения, соответствующая уровню значимости $\alpha$.

Доверительный интервал для параметра $a$: $\boxed{\bar{x}-U_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+U_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}}$

2. Для **бесповторного отбора**:

Доверительный интервал для средней: $\boxed{\bar{x}-\Delta_{\bar{x}}<\overline{x_0}<\bar{x}+\Delta_{\bar{x}}}$ , где

$\bar{x}$ - выборочная средняя; $\bar{x}_0$ - средняя генеральной совокупности;

$\Delta_{\bar{x}}$ - предельная ошибка выборки для средней.

**Предельная ошибка выборки**: $\boxed{\Delta_{\bar{x}}=t\cdot\sqrt{\frac{S^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}}$ , где

$t$ - квантиль нормального закона распределения (при $\alpha = 0,05 \quad t = 1,96$); N- объем генеральной совокупности; n- объем выборки; $S^2$ - исправленная выборочная дисперсия.

***Квантилем*** или ***нормированным отклонением*** называется отношение предельной ошибки к средней ошибке.

$\boxed{t = \dfrac{\Delta_{\bar{x}}}{M_{\bar{x}_0}}}$, где $M_{\bar{x}_0} = \dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$

Квантиль вычисляется по соответствующему уровню значимости $\alpha$ (при $n \geq 30$, $t$ - квантиль нормального закона распределения, при $n < 30$, $t$ - квантиль распределения Стьюдента).

Существуют таблицы значений для $t$ в зависимости от уровня значимости $\alpha$.

Важной является задача определения объема выборочной совокупности **n** при заданном уровне значимости. В случае бесповторного отбора необходимый объем выборки определяется по формуле:

$$\boxed{n = \frac{t^2 \cdot S^2 \cdot N}{t^2 \cdot S^2 + \Delta_{\bar{x}}^2 \cdot N}}$$

**Пример:** По условию задачи пункта 3.1. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ определить:

1) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения;

2) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$;

3) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$ предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении уровня остальных характеристик.

Учитывая, что проводилась 10% случайная бесповторная выборка.

**Решение.**

1) Несмещенной оценкой $M(x)$ является выборочная средняя $\bar{x}$:

$\bar{x} = 8,613$

Несмещенной оценкой $D(x)$ является исправленная выборочная дисперсия $S^2$: $S^2 = \sigma^2(x) \cdot \dfrac{n}{n-1} = \dfrac{5,981 \cdot 60}{59} = 6,082$

Несмещенной оценкой $\sigma(x)$ является стандартное отклонение S:

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,082} = 2,466$

2) Средняя численность работников на 100 га с/х угодий = 8,61. Найдем доверительный интервал для средней: $\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} < \bar{x}_0 < \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}$

$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\dfrac{S^2}{n}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)}$ - предельная ошибка выборки для средней.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ квантиль нормального распределения $t = 1{,}96$.

Учитывая, что проводилась 10% выборка,

$$N = 10 \cdot 60 = 600 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\bar{x}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{6{,}082}{60}\left(1 - \frac{60}{600}\right)} = 0{,}592$$

Значит, с доверительной вероятностью $1 - \alpha = 0{,}95$, можно утверждать, что средняя численность работников на 100 га с/х угодий во всей совокупности хозяйств находится в границах $\bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}} = 8{,}61 \pm 0{,}592$, т.е. от 8,021 до 9,205.

3) Необходимый объем выборки, для того, чтобы предельная ошибка не превышала $0{,}5 \cdot \Delta_{\bar{x}}$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ в случае случайного бесповторного отбора, определяется по формуле:

$$n = \frac{t^2 \cdot S^2 \cdot N}{t^2 \cdot S^2 + \Delta_{\bar{x}}^2 \cdot N},$$

$$\Delta_{\bar{x}}^2 = \left(0{,}5 \cdot \Delta_{\bar{x}}\right)^2 = \left(0{,}5 \cdot 0{,}592\right)^2 = \left(0{,}296\right)^2$$

$$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 6{,}082 \cdot 600}{(1{,}96)^2 \cdot 6{,}082 + (0{,}296)^2 \cdot 600} = \frac{14018{,}766}{23{,}365 + 52{,}576} = 185$$

Значит, для уменьшения предельной ошибки в два раза объем совокупности необходимо увеличить в 3 раза.

### *Задания для решения в аудитории*

**1.** При изменении диаметра валика после шлифовки была получена следующая выборка (объемом $n = 55$):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20.3 | 15.4 | 17.2 | 19.2 | 23.3 | 18.1 | 21.9 |
| 15.3 | 16.8 | 13.2 | 20.4 | 16.5 | 19.7 | 20.5 |
| 14.3 | 20.1 | 16.8 | 14.7 | 20.8 | 19.5 | 15.3 |
| 19.3 | 17.8 | 16.2 | 15.7 | 22.8 | 21.9 | 12.5 |
| 10.1 | 21.1 | 18.3 | 14.7 | 14.5 | 18.1 | 18.4 |
| 13.9 | 19.8 | 18.5 | 20.2 | 23.8 | 16.7 | 20.4 |
| 19.5 | 17.2 | 19.6 | 17.8 | 21.3 | 17.5 | 19.4 |
| 17.8 | 13.5 | 17.8 | 11.8 | 18.6 | 19.1 | |

Необходимо: 1) составить интервальный вариационный ряд, построить полигон и гистограмму; 2) найти моду и медиану; 3) рассчитать дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесс. Сделать выводы.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ определить:

4) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения;

5) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $(1 - \alpha)$;

6) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью $(1 - \alpha)$ предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении уровня остальных характеристик.

Учитывая, что проводилась 10% случайная бесповторная выборка.

## 3.5 Элементы теории корреляции

В сельскохозяйственных науках, в отличие от точных наук, полные (точные) функциональные связи встречаются редко, так как возможность искусственной изоляции влияния других факторов на изучаемые признаки в большинстве случаев неосуществима.

Например, связь урожайность - удобрения, имеется, но есть еще ряд факторов, влияющих на урожайность (севообороты, семена, предшественники, агротехника - субъективные факторы; метеорологические факторы- объективные).

Поэтому связь урожайность - удобрения неполная функциональная связь. Эту связь называют **корреляционной** (англ. correlation – соотношение, соответствие).

Метод корреляции применяется для того, чтобы при сложном взаимодействии посторонних влияний выяснить, какова была бы зависимость между результатом и фактором, если бы посторонние причины (факторы) не изменялись и своим изменением не искажали основную зависимость.

*Первая задача корреляции*: выявление на основе наблюдений над большим количеством фактов того, как изменяется в среднем результативный признак в связи с изменением данного фактора (парная корреляция) или группы факторов (множественная корреляция). Эта задача решается нахождением уравнения связи.

*Вторая задача корреляции:* определение степени влияния искажающих факторов. Эта задача решается при помощи различных показателей тесноты связи: коэффициента корреляции, корреляционного отношения.

Процесс нахождения связи между признаками называется ***выравниванием.***

Выравнивание ведет к нахождению переменной средней $\overline{y}_x$, исчисленной в предположении функциональной зависимости **у** от **х**, т.е. $\overline{y}_x = f(x)$, и называется **уравнением регрессии.**

При изучении влияния одних признаков на другие выделяются два признака - **факториальный** и **результативный**. Выделение этих признаков осуществляется путем логического анализа.

Например, в связи урожайность - осадки, урожайность - результативный признак, а осадки - факториальный.

### Графическое изображение связи.

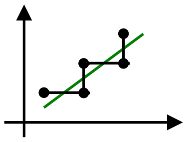
Графическое изображение связи изучаемых явлений позволяет не только установить наличие или отсутствие связи между ними, но и изучить характер этой связи (форму связи и тесноту связи).

Если имеются числовые характеристики факториальных и результативных признаков одного и того же явления, то каждую пару чисел можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс - факториальный признак, по оси ординат - результативный признак.

Ломаная, соединяющая эти точки, называется **ломаной регрессии**.

По форме этой ломаной приближенно определяют вид зависимости.

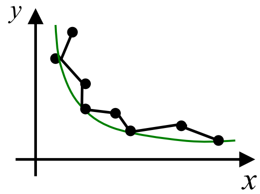
1. Если из графика видно, что связь близка к прямолинейной, то уравнение регрессии пишется в виде:



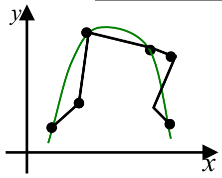
□ $\boxed{\overline{y} = ax + b}$

2. Если экспериментальные данные располагаются так, что через них можно провести гиперболу, то можно ожидать уравнение в виде:

$$\boxed{\overline{y} = \frac{k}{x}; \quad \overline{y} = \frac{a}{x+b}, \quad \overline{y} = \frac{a}{x+b} + c}$$




3. Если кривая имеет max или min, то зависимость определяется по уравнению: $\boxed{\overline{y} = ax^2 + bx + c}$




Для выявления функциональных зависимостей и определения неизвестных коэффициентов этой зависимости можно воспользоваться методом наименьших квадратов.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \Rightarrow \quad y = ax + b$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$$

## Коэффициент корреляции.

После того, как уравнение регрессии найдено, находят так называемый ***коэффициент корреляции.*** Он используется для оценки тесноты связи между величинами при прямолинейной зависимости. Обозначается буквой $r$ и определяется по формуле:

$$\boxed{r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}}$$ , где

$\bar{x}$ - среднее значение факториального (причинного) признака $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$

$\bar{y}$ - среднее значение результативного признака $\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}$

Промежуточные вычисления удобно располагать в виде таблицы:

| № наблюдения | $x_i$ | $y_i$ | $x_i-\bar{x}$ | $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ | $y_i-\bar{y}$ | $\left(y_i-\bar{y}\right)^2$ | $\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| $\sum$ | … | … | … | … | … | … | … |

Величина коэффициента корреляции находится в пределах $\boxed{-1\le r\le 1}$:

1) Чем ближе $|r|$ к 1, тем теснее связь между факториальным и результативным признаками.

2) при $|r|=1$ получается полная функциональная связь.

3) если $|r|\to 0$, то связь между признаками слабая.

4) при $|r|=0$ связи между признаками нет (линейная зависимость отсутствует).

5) при $r>0$ зависимость между признаками прямая (возрастающая).

6) при $r<0$ зависимость обратная (убывающая).

Если зависимость между признаками прямая, то можно пользоваться уравнением прямой регрессии: $\boxed{y-\bar{y}=b_{y/x}\left(x-\bar{x}\right)}$ , где

$b_{y/x}$ - коэффициент регрессии, который определяется по формуле:

$$\boxed{b_{y/x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\cdot\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}$$

**Пример** Для 10 петушков леггорнов 15 дневного возраста были получены следующие данные о весе их тела (**х**) в граммах и весе гребня (**у**) (в мг):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 83 | 72 | 69 | 90 | 90 | 95 | 95 | 91 | 75 | 70 |
| $y_i$ | 56 | 42 | 18 | 84 | 56 | 107 | 90 | 68 | 31 | 48 |

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии;

3) нанести на чертеж исходные данные и построить прямую регрессии.

**Решение**: Составим вспомогательную таблицу

| № | $x_i$ | $y_i$ | $\left(x_i - \overline{x}\right)$ | $\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ | $y_i - \overline{y}$ | $\left(y_i - \overline{y}\right)^2$ | $\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 83 | 56 | 0 | 0 | -4 | 16 | 0 |
| 2 | 72 | 42 | -11 | 121 | -18 | 324 | 198 |
| 3 | 69 | 18 | -14 | 186 | -42 | 1764 | 588 |
| 4 | 90 | 84 | 7 | 49 | 24 | 576 | 168 |
| 5 | 90 | 56 | 7 | 49 | -4 | 16 | -28 |
| 6 | 95 | 107 | 12 | 144 | 47 | 2209 | 564 |
| 7 | 95 | 90 | 12 | 144 | 30 | 900 | 360 |
| 8 | 91 | 68 | 8 | 64 | 8 | 64 | 64 |
| 9 | 75 | 31 | -8 | 64 | -29 | 841 | 232 |
| 10 | 70 | 48 | -13 | 169 | 12 | 144 | 156 |
| $\sum$ | 30 | 600 | 0 | 990 | 0 | 6854 | 2302 |

Вычисляем средние:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{830}{10} = 83 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{600}{10} = 60$$

1) найдем коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} \qquad r = \frac{2302}{\sqrt{990\cdot 6854}} = 0,88$$

*Вывод:* между весом тела **x** и весом гребня **y** у 15- дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) найдем коэффициент регрессии:

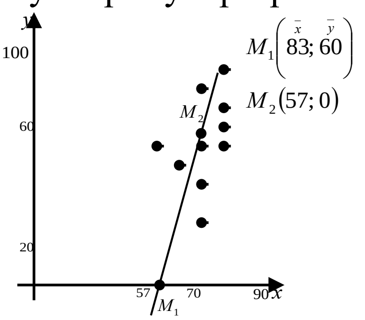
$$b_{y/x} = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \qquad b_{y/x} = \frac{2302}{990} \approx 2,32$$

Подставим в уравнение прямой регрессии:

$$y - \overline{y} = b_{y/x}\left(x - \overline{x}\right) \quad y - 60 = 2,32\left(x - 83\right)$$

$$\underline{y = 2,32x - 132,56}$$

3) наносим исходные данные на координатную плоскость и строим найденную прямую регрессии.



### *Задания для решения в аудитории*

Дана таблица значений *x* и *y*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2,8 | 3,4 | 3,7 | 3,4 | 2,8 | 1,5 | 4,9 | 7,2 | 1,7 | 3,4 |
| y | 1,3 | 2,0 | 4,4 | 3,0 | 2,2 | 1,8 | 5,0 | 2,8 | 9,1 | 4,4 |

Требуется:

1. найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;
2. составить уравнение прямой регрессии;
3. нанести на чертеж исходные данные и построить прямую регрессии.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. Москва. 2012. № 11. 51-52 с.

2. Элементы теории вероятностей случайных событий: учебно-методическое пособие. Невидомская И.А., Мелешко С.В., Гулай Т.А. – Ставрополь: ООО «Ставропольбланкиздат». 2012. – 72 с.

3. Случайные величины. Основные законы распределения случайных величин. Учебно-методическое пособие / Мелешко С.В., Невидомская И.А., Гулай Т.А. – Ставрополь: ИП Светличная С.Г., 2014. – 60 с.

Приложение 1

**Значения функции** $P_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

| m | λ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3 | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5 | | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6 | | | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7 | | | | | 0,000001 | 0,000003 |
| | | | | | | |

| m | λ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2 | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3 | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4 | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5 | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6 | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7 | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8 | | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008101 |
| 9 | | | | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10 | | | | | 0,000038 | 0,000810 |
| 11 | | | | | 0,000007 | 0,000221 |
| 12 | | | | | 0,000001 | 0,000055 |
| 13 | | | | | | 0,000013 |
| 14 | | | | | | 0,000003 |
| 15 | | | | | | 0,000001 |

| *m* | λ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 |
| 2 | 0,146525 | 0,084224 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3 | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5 | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6 | 0,104194 | 0,146623 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7 | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8 | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9 | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 |
| 10 | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11 | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12 | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13 | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14 | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15 | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16 | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17 | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |
| 18 | | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 |
| 19 | | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,001370 |
| 20 | | | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 |
| 21 | | | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 |
| 22 | | | | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 |
| 23 | | | | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 |
| 24 | | | | | 0,000003 | 0,000016 |
| 25 | | | | | 0,000001 | 0,000006 |
| 26 | | | | | | 0,000002 |

Приложение 2

**Значения функции** $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | *x* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 | 0,0 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3856 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 | 0,1 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 | 0,2 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 | 0,3 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 | 0,4 |
| | | | | | | | | | | | |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 | 0,5 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 | 0,6 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 | 0,7 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 | 0,8 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 | 0,9 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 | 1,0 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2021 | 1989 | 1965 | 1,1 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 | 1,2 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 | 1,3 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 | 1,4 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 | 1,5 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 | 1,6 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 | 1,7 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0631 | 0669 | 1,8 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 | 1,9 |
| | | | | | | | | | | | |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 | 2,0 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 | 2,1 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 | 2,2 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0299 | 2,3 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 | 2,4 |
| | | | | | | | | | | | |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0134 | 0139 | 2,5 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 | 2,6 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 | 2,7 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 | 2,8 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 | 2,9 |
| | | | | | | | | | | | |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 | 3,0 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 | 3,1 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 | 3,2 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 | 3,3 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 | 3,4 |
| | | | | | | | | | | | |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 | 3,5 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 | 3,6 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 3,7 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 3,8 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 | 3,9 |

Приложение 3

## Значения функции *Ф(x)*

| *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,31 | 0,1217 | 0,62 | 0,2324 | 0,93 | 0,3238 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,32 | 0,1255 | 0,63 | 0,2357 | 0,94 | 0,3264 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,33 | 0,1293 | 0,64 | 0,2389 | 0,95 | 0,3289 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,34 | 0,1331 | 0,65 | 0,2422 | 0,96 | 0,3315 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,35 | 0,1368 | 0,66 | 0,2454 | 0,97 | 0,3340 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,36 | 0,1406 | 0,67 | 0,2486 | 0,98 | 0,3365 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,37 | 0,1443 | 0,68 | 0,2517 | 0,99 | 0,3389 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,38 | 0,1480 | 0,69 | 0,2549 | 1,00 | 0,3413 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,39 | 0,1517 | 0,70 | 0,2580 | 1,01 | 0,3438 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,40 | 0,1554 | 0,71 | 0,2611 | 1,02 | 0,3461 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,41 | 0,1591 | 0,72 | 0,2642 | 1,03 | 0,3485 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,42 | 0,1628 | 0,73 | 0,2673 | 1,04 | 0,3508 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,43 | 0,1664 | 0,74 | 0,2703 | 1,05 | 0,3531 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,44 | 0,1700 | 0,75 | 0,2734 | 1,06 | 0,3554 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,45 | 0,1736 | 0,76 | 0,2764 | 1,07 | 0,3577 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,46 | 0,1772 | 0,77 | 0,2794 | 1,08 | 0,3599 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,47 | 0,1808 | 0,78 | 0,2823 | 1,09 | 0,3621 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,48 | 0,1844 | 0,79 | 0,2852 | 1,10 | 0,3643 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,49 | 0,1879 | 0,80 | 0,2881 | 1,11 | 0,3665 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,50 | 0,1915 | 0,81 | 0,2910 | 1,12 | 0,3686 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,51 | 0,1950 | 0,82 | 0,2939 | 1,13 | 0,3708 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,52 | 0,1985 | 0,83 | 0,2967 | 1,14 | 0,3729 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,53 | 0,2019 | 0,84 | 0,2995 | 1,15 | 0,3749 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,54 | 0,2054 | 0,85 | 0,3023 | 1,16 | 0,3770 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,55 | 0,2088 | 0,86 | 0,3051 | 1,17 | 0,3790 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,56 | 0,2123 | 0,87 | 0,3078 | 1,18 | 0,3810 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,57 | 0,2157 | 0,88 | 0,3106 | 1,19 | 0,3830 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,58 | 0,2190 | 0,89 | 0,3133 | 1,20 | 0,3849 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,59 | 0,2224 | 0,90 | 0,3159 | 1,21 | 0,3869 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,60 | 0,2257 | 0,91 | 0,3186 | 1,22 | 0,3888 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,61 | 0,2291 | 0,92 | 0,3112 | 1,23 | 0,3907 |

| *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,24 | 0,3925 | 1,55 | 0,4394 | 1,86 | 0,4686 | 2,34 | 0,4904 |
| 1,25 | 0,3914 | 1,56 | 0,4406 | 1,87 | 0,4693 | 2,36 | 0,4908 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,57 | 0,4418 | 1,88 | 0,4699 | 2,38 | 0,4913 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,58 | 0,4429 | 1,89 | 0,4706 | 2,40 | 0,4918 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,59 | 0,4441 | 1,90 | 0,4713 | 2,42 | 0,4922 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,60 | 0,4452 | 1,91 | 0,4719 | 2,44 | 0,4927 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,61 | 0,4463 | 1,92 | 0,4726 | 2,46 | 0,4931 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,62 | 0,4474 | 1,93 | 0,4732 | 2,48 | 0,4934 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,63 | 0,4484 | 1,94 | 0,4738 | 2,50 | 0,4938 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,64 | 0,4495 | 1,95 | 0,4744 | 2,52 | 0,4941 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,65 | 0,4505 | 1,96 | 0,4750 | 2,54 | 0,4945 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,66 | 0,4515 | 1,97 | 0,4756 | 2,56 | 0,4948 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,67 | 0,4525 | 1,98 | 0,4761 | 2,58 | 0,4951 |
| 1,37 | 0,4147 | 1,68 | 0,4535 | 1,99 | 0,4767 | 2,60 | 0,4953 |
| 1,38 | 0,4162 | 1,69 | 0,4545 | 2,00 | 0,4772 | 2,62 | 0,4956 |
| 1,39 | 0,4177 | 1,70 | 0,4554 | 2,02 | 0,4783 | 2,64 | 0,4959 |
| 1,40 | 0,4192 | 1,71 | 0,4564 | 2,04 | 0,4793 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,41 | 0,4207 | 1,72 | 0,4573 | 2,06 | 0,4803 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,42 | 0,4222 | 1,73 | 0,4582 | 2,08 | 0,4812 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,43 | 0,4236 | 1,74 | 0,4591 | 2,10 | 0,4821 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,44 | 0,4251 | 1,75 | 0,4599 | 2,12 | 0,4830 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,45 | 0,4265 | 1,76 | 0,4608 | 2,14 | 0,4838 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,46 | 0,4279 | 1,77 | 0,4616 | 2,16 | 0,4846 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,47 | 0,4292 | 1,78 | 0,4625 | 2,18 | 0,4854 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,48 | 0,4306 | 1,79 | 0,4633 | 2,20 | 0,4861 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,49 | 0,4319 | 1,80 | 0,4641 | 2,22 | 0,4868 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,50 | 0,4332 | 1,81 | 0,4649 | 2,24 | 0,4875 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,51 | 0,4345 | 1,82 | 0,4656 | 2,26 | 0,4881 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,52 | 0,4357 | 1,83 | 0,4664 | 2,28 | 0,4887 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,53 | 0,4370 | 1,84 | 0,4671 | 2,30 | 0,4893 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,54 | 0,4382 | 1,85 | 0,4678 | 2,32 | 0,4898 | 2,98 | 0,4986 |

| *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* | *x* | *Φ(x)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,00 | 0,49865 | 4,00 | 0,499968 | | | | |
| 3,20 | 0,49931 | 4,50 | 0,499997 | | | | |
| 3,40 | 0,49966 | 5,00 | 0,49999997 | | | | |
| 3,60 | 0,499841 | | | | | | |
| 3,80 | 0,499928 | | | | | | |

## ОГЛАВЛЕНИЕ